

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL – PPGEC

# **ESTUDO DE LAJES LISAS DE CONCRETO COM VISÃO INTEGRADA DE FLEXÃO E PUNÇÃO**

**FERNANDO TOPPAN RABELLO**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação  
em Engenharia Civil - PPGEC - da Universidade  
Federal de Santa Catarina, como requisito para  
obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Daniel Domingues Loriggio, Dr

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Rabello, Fernando Toppan

Estudo de lajes lisas de concreto com visão integrada  
de flexão e punção / Fernando Toppan Rabello ; orientador,  
Daniel Domingues Loriggio - Florianópolis, SC, 2016.  
268 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação  
Multidisciplinar em Saúde.

Inclui referências

1. Saúde. 2. Lajes lisas. 3. Punção. 4. Modelagem. 5.  
Variabilidade. I. Loriggio, Daniel Domingues. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação Multidisciplinar em Saúde. III. Título.

Fernando Toppan Rabello

## **ESTUDOS DE LAJES LISAS DE CONCRETO COM VISÃO INTEGRADA DE FLEXÃO E PUNÇÃO**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Florianópolis, 18 de julho de 2016.

---

Prof. Glicério Trichês, Dr.  
Coordenador do Curso

### **Banca Examinadora:**

---

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.  
Orientador - UFSC

---

Prof.<sup>a</sup> Ângela do Valle , Dr.<sup>a</sup> UFSC

---

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, Dr. UFSC

---

Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr. UFSC

---

Prof. Américo Campos Filho, Dr. UFRGS

---

Prof. Fernando Rebouças Stucchi, Dr. USP

Este trabalho é dedicado aos meus orientadores de doutorado e mestrado - e amigos - Professores Daniel Domingues Loriggio e Narbal Ataliba Marcellino, cuja dedicação e apadrinhamento tornaram esse trabalho possível!



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço meus pais e meus irmãos Dani e Carol pelo grande incentivo e apoio, e pelos ótimos momentos juntos.

À minha esposa Cristina Djusca pela motivação, inspiração e carinho, e à sua família pela ajuda e atenção.

Ao meu professor orientador do doutorado Daniel Domingues Loriggio pelos ensinamentos, pelo encorajamento e pela confiança.

Ao meu professor orientador de mestrado, Narbal Ataliba Marcellino, por sempre estar disposto em me ajudar em todos os momentos.

Aos professores e funcionários do IFSC, sempre muito atenciosos e prestativos.

À professora Luciana Calçada, ao chefe do DACC Rafael Andrade de Souza pela enorme ajuda e confiança.

Ao professor Carlos Alberto Fernandes, que passou pelos mesmos desafios na mesma época, pela atenção e apoio.

Ao Prof. Stucchi, Prof. Américo, Prof. Roberto, Prof.<sup>a</sup> Ângela e Prof. Wellison pelas valiosas contribuições para a versão final deste trabalho.

Ao engenheiro Adriano Etcheverry da empresa Flexcon Engenharia, pela paciência e pelos preciosos conhecimentos, cujo tempo dispendido para me ensinar eu compreendo e valorizo cada dia mais.

À minha vó Clara, pelas velas acendidas, pelos conselhos e incentivo, e à vó Irene, pelo carinho, pelos conselhos e pela torcida.

Aos meus grandes amigos Gus, Laurindo, Tio Ro, Tomão e Guigo por, mesmo distantes, sempre trazerem divertidas lembranças!

*“A única coisa que é certa  
é que nada é certo”*

Plínio, o Velho  
(Século I)

# Resumo

Rabello, Fernando Toppan. *Estudo de lajes lisas de concreto com visão integrada de flexão e punção*. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. 192 págs.

Muitas vezes, a verificação da punção é feita sem uma análise adequada do modelo usado para a verificação da flexão da laje. Uma vez que a normalização usa esforços normais e momentos fletores que atuam no pilar, e esses esforços são decorrentes da análise estrutural, uma visão integrada é essencial para a verificação da punção. O objetivo deste trabalho é estudar, com um enfoque voltado para projeto, os esforços e as tensões solicitantes em lajes lisas de concreto armado, obtidos por diferentes métodos de análise e modelagens de pilar, analisando suas variabilidades e efeitos na verificação da punção. São revistos os métodos de análise de lajes lisas mais difundidos, incluindo diferentes métodos dos pórticos equivalentes. Para os métodos numéricos, são exploradas diversas maneiras de modelar o pilar para solucionar o problema da singularidade que ocorre ao representar o pilar como apoio pontual diretamente na laje. É apresentada uma revisão de pesquisas que tratam da punção, de modo a explicitar o alheamento destas em relação à visão integrada de flexão e punção. A análise dos resultados é dividida em duas abordagens: a primeira estuda a variabilidade dos resultados dos modelos de flexão que são aplicados na verificação da punção pela NBR 6118/14; a segunda estuda as tensões de cisalhamento no perímetro crítico  $c'$  da norma brasileira, obtidas de modelos numéricos. Na primeira abordagem, as variabilidades das forças de reação do pilar resultaram pequenas, independente do modelo de análise, enquanto que os momentos desbalanceados apresentaram coeficientes de variação muito elevados. Nas análises pela segunda abordagem, as tensões de cisalhamento no perímetro de controle  $c'$  do modelo numérico se mostraram bastante sensíveis à modelagem do pilar e ao refinamento da malha. As variabilidades dos esforços e das tensões no perímetro  $c'$  foram adaptadas na forma de variáveis aleatórias de incerteza de modelo, que foram usadas em estudos simplificados de confiabilidade.

Palavras-chave: *lajes lisas, punção, modelagem, variabilidade.*

# *Abstract*

Rabello, Fernando Toppan. ***Study of concrete flat slabs with an integrated flexure and punching shear approach***. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. 192p.

Punching shear design is often made without a proper analysis of the model used for the slab bending design. Since codes use normal forces and transferred bending moments to the column, and these forces are obtained from a structural analysis, an integrated approach is essential for checking the punching shear. The objective of this thesis is to study, with a focused approach to design, the forces and stresses in reinforced concrete flat slabs, obtained by different analysis methods and models, analyzing their variability effects on the punching shear verification. The most widespread flat slab analysis methods are visited, including different equivalent frame methods. For the numerical methods, various ways to model the column to solve the problem of the singularity that occurs when representing the column supported directly on the slab are explored. A review on the punching shear is presented, in order to explain the alienation of those in relation to the integrated view of bending and punching. The analysis is divided into two approaches: the first one studies the variability of the results of bending models that are applied to the punching shear check by the NBR 6118/14; the second approach studies the shear stresses in the critical perimeter  $c'$  of the Brazilian code, obtained from numerical models. In the first approach, the variability of the reaction forces are minor, regardless the analysis model, while the unbalanced moments presented very high coefficients of variation. In the second approach, shear stresses on the perimeter control  $c'$  of the numerical model proved to be quite sensitive to the column modeling and of the mesh size. Variabilities of forces and stresses on the perimeter  $c'$  were adapted in the form of model uncertainty, which were used in simplified reliability studies.

Palavras-chave: ***flat slabs, punching shear, model analysis, variability.***

# *Sumário*

Lista de Figuras .....	i
Lista de Quadros.....	vi
Lista de Siglas .....	viii
Lista de Símbolos.....	ix
Resumo .....	vii
Abstract.....	viii
<b>1</b> Introdução.....	1
1.1 Objetivo Geral .....	6
1.2 Objetivos específicos .....	6
<b>2</b> Revisão de Literatura .....	7
2.1 Vantagens e desvantagens das lajes lisas .....	7
2.1.1 Vantagens .....	7
2.1.2 Desvantagens .....	8
2.2 Histórico de lajes lisas .....	8
2.3 Considerações referentes à punção.....	11
2.3.1 Modelos de cálculo.....	11
2.3.2 Considerações sobre a norma NBR 6118 /14.....	16
2.4 Análise estrutural de lajes .....	24
2.4.1 Teoria das placas delgadas .....	24
2.4.2 Fundamentos do método dos deslocamentos .....	30
2.4.3 Analogia de grelha.....	31
2.4.4 Método dos elementos finitos.....	35
2.4.5 Método dos pórticos equivalentes .....	37
2.5 Análise de confiabilidade.....	44
2.5.1 Função de distribuição de probabilidades .....	44
2.5.2 Estimativa da confiabilidade.....	47
<b>3</b> Pesquisas Relevantes.....	53
3.1 Punção.....	53
3.1.1 Estudos experimentais.....	53
3.1.2 Estudos numéricos sobre punção.....	58

3.2	Análises numéricas de esforços e tensões em lajes lisas .....	60
3.2.1	Tensões solicitantes no perímetro crítico por modelo numérico .....	61
3.2.2	Estudos sobre modelagem de pilares em modelos numéricos .....	65
3.2.3	Estudos sobre diferentes métodos de análise de lajes lisas.....	75
3.2.4	Estudos de confiabilidade com incertezas de modelo .....	77
<b>4</b>	<b>Procedimentos Metodológicos.....</b>	<b>89</b>
4.1	Parâmetros gerais.....	89
4.1.1	Modelagem de pilares .....	90
4.1.2	Variável Erro de Modelo e <i>Engineering Modelling Uncertainty</i> (EMU) .....	98
4.1.3	Análise probabilística.....	99
4.2	Abordagem pela análise dos esforços solicitantes .....	103
4.2.1	Análise de sensibilidade para definição dos casos de estudo para estudo dos esforços	105
4.2.2	Casos de estudo para a análise dos esforços .....	111
4.2.3	Descrição dos modelos .....	113
4.2.4	Variabilidades, EMU e análise de confiabilidade .....	116
4.3	Abordagem pela análise das tensões solicitantes no perímetro crítico c' da NBR 6118/14 .....	118
4.3.1	Descrição do modelo simplificado da laje.....	118
4.3.2	Modelos de análise .....	120
4.3.3	EMU e análise de confiabilidade.....	121
<b>5</b>	<b>Estudo dos esforços solicitantes para verificação da punção.....</b>	<b>123</b>
5.1	Pilar interno A1-R .....	123
5.1.1	Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos.....	123
5.1.2	Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança .....	128
5.2	Pilar interno A2-R .....	131
5.2.1	Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos.....	131
5.2.2	Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança .....	135
5.3	Pilar interno B2-Q .....	139
5.3.1	Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos.....	139
5.3.2	Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança .....	143
5.4	Pilar interno B2-R.....	147
5.4.1	Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos.....	147
5.4.2	Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança .....	153
5.5	Conclusões da abordagem sobre os esforços solicitantes (N e M) .....	157
<b>6</b>	<b>Estudo das tensões solicitantes de punção por modelo numérico .....</b>	<b>159</b>
6.1	Estudo das tensões no perímetro crítico.....	160

6.1.1 Pilar de seção quadrada modelado com trecho rígido com $b=16\text{cm}$ e $M_y = 45\text{kN.m}$ ...	160
6.1.2 Pilar de seção quadrada modelado como apoio pontual com $b=16\text{cm}$ e $M_y=45\text{kN.m}$ .	162
6.1.3 Pilar com seção quadrada modelado com trecho rígido com $b=16\text{cm}$ e $M_y=M_x=45\text{kN.m}$ .....	163
6.1.4 Pilar com seção quadrada modelado com trecho rígido com $b=30\text{cm}$ e $M_y=45\text{kN.m}$ ..	165
6.1.5 Pilar com seção retangular modelado com trecho rígido com $b=16\text{cm}$ e $M_y=45\text{kN.m}$	166
6.1.6 Pilar com seção retangular modelado com trecho rígido com $b=16\text{cm}$ e $M_x=45\text{kN.m}$	168
6.2 Tensões de cisalhamento segundo diferentes modelagens de pilar e malhas grossas .....	170
6.2.1 Tensões médias.....	170
6.2.2 Tensões máximas .....	171
6.3 Modelagens de pilar e refinamentos de malha que melhor se ajustam aos valores fornecidos pela NBR 6118/14.....	172
6.4 Conclusões da abordagem sobre as tensões solicitantes no perímetro de controle	178
<b>7</b> Considerações finais .....	180
7.1 Sugestões para trabalhos futuros.....	182
<b>8</b> Referências .....	183

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Diagrama de tensões solicitantes no perímetro crítico $c'$ (BØLVIKEN, 2013).....	2
Figura 1.2 – Piper's Row Car Park (CAPRANI, 2008) e Harbour Cay Condominium (KUKORLO, 2009).....	4
Figura 2.1 - Edifício com lajes lisas.....	7
Figura 2.2 – Teste de carga efetuado por Turner no depósito Hoffman, Milwaukee (GASPARINI, 2002).....	9
Figura 2.3 – Projeto de Turner (1905) e Maillart (1910) respectivamente. (SACRAMENTO et al, 2012).....	10
Figura 2.4 – Definição da superfície de controle da NBR 6118/03 (IBRACON, 2003).....	12
Figura 2.5 – Modelo de bielas e tirantes para a punção sem transferência de momentos.....	13
Figura 2.6 – Modelo de bielas e tirantes para a punção com transferência de momentos.....	14
Figura 2.7 – Hipótese de ruptura e elemento rígido do modelo mecânico de Kinnunen e Nylander (CORDOVIL, 1997).....	15
Figura 2.8 – Rotação do elemento rígido (CORDOVIL, 1997).....	16
Figura 2.9 – Determinação de $F_{sd}$ e $M_{sd}$ (STUCCHI & KNAP, 1993 apud IBRACON, 2004).....	17
Figura 2.10 – Comparação dos resultados obtidos em ensaios com a NBR 6118 (FIB Bulletin 12, 2001).....	18
Figura 2.11 – Perímetro crítico em pilares internos (NBR 6118 /14).....	19
Figura 2.12 – Relação dos lados $c_1$ e $c_2$ dos pilares com os momentos fletores.....	21
Figura 2.13 – Disposição da armadura de punção e perímetro da superfície crítica $C''$ (NBR 6118 /14).....	23
Figura 2.14 – Disposição da armadura de punção e da armadura de colapso progressivo.....	24
Figura 2.15 – Equilíbrio de um elemento de placa para forças cortantes (COELHO, 2000).....	25
Figura 2.16 – Equilíbrio de um elemento de placa para momentos fletores e torçores (COELHO, 2000).....	25
Figura 2.17 – Curvatura de um elemento de placa submetido a um momento $m_x$ (HENNRICHS, 2003).....	27
Figura 2.18 – (a) Laje protótipo; (b) Grelha equivalente (HAMBLY, 1976).....	32
Figura 2.19 – Graus de liberdade de uma barra de grelha (COELHO, 2000).....	33
Figura 2.20 – Momentos fletores e reações na barra devidos a um deslocamento (COELHO, 2000).....	33
Figura 2.21 – Momentos de torção na barra devido a rotação em uma das extremidades (COELHO, 2000).....	33
Figura 2.22 – Momentos fletores e reação na barra devidos a uma rotação em uma das extremidades (COELHO, 2000).....	33
Figura 2.23 – Elemento quadrilátero de Batoz e Taharm (KANSARA, 2004).....	36
Figura 2.24 – Diferença percentual dos momentos desbalanceados pelo método de cada norma.....	38
Figura 2.25 – Definição dos pórticos segundo a norma brasileira (EMERICK, 2005).....	38
Figura 2.26 – Faixas para a distribuição dos momentos segundo a norma brasileira.....	39
Figura 2.27 – Divisão dos pórticos.....	40
Figura 2.28 – Faixas para a distribuição dos momentos.....	41
Figura 2.29 – Coeficientes para a distribuição dos momentos de acordo com o ACI.....	42
Figura 2.30 – Valores de $\alpha$ e $\gamma$ para a seção transversal laje-pilar (EMERICK, 2005).....	43
Figura 2.31 – Pilar equivalente (EMERICK, 2005).....	44



Figura 2.32 – Interferência entre as distribuições das funções de sollicitação e resistência (SOUZA, 2013).....	47
Figura 3.1 – Exemplo de armadura de punção tipo <i>studs</i> .....	52
Figura 3.2 – Curvas de falhas por punção e por flexão (MENÉTREY, 1998).....	54
Figura 3.3 – Lajes cortadas ao meio após a ruptura nos enaios (TRAUTWEIN, 2006).....	55
Figura 3.4 – Formação de fissuras na carga última no estudo axissimétrico de uma laje (MENÉTREY, 2002).....	57
Figura 3.5 – Formação da fissura inclinada de punção no modelo numérico tridimensional e no ensaio (OZBOLT & VOCKE, 1999).....	58
Figura 3.6 – Formação da fissura inclinada no modelo numérico tridimensional e no ensaio (POLAK, 1998).....	58
Figura 3.7 – Modelo da ligação laje-pilar para estudo das tensões no perímetro crítico (BØLVIKEN, 2013).....	59
Figura 3.8 – Pontos de medição do esforço cortante ao longo do perímetro crítico (BØLVIKEN, 2013).....	60
Figura 3.9 – Distribuição dos esforços cortantes para $V_{xz}$ e $V_{yz}$ respectivamente (BØLVIKEN, 2013).....	61
Figura 3.10 – Distribuição das tensões no perímetro crítico pelo EC2 e pelo modelo numérico (Bølviken, 2013).....	62
Figura 3.11 – Distribuição dos momentos (ENOCHSSON, 2001).....	64
Figura 3.12 – Modelo pelo método dos elementos finitos e por analogia de grelha (HENNRICH, 2003).....	65
Figura 3.13 – Momentos negativos para diferentes seções de pilar (HENNRICH, 2003).....	65
Figura 3.14 – Momentos fletores ao longo de um corte para um pilar quadrado de lado 40cm (RASHED, 2004).....	66
Figura 3.15 – Momentos fletores ao longo de um corte para um pilar quadrado de lado 10cm (RASHED, 2004).....	67
Figura 3.16 – Variação dos momentos transferidos ao pilar em função da relação entre os lados do pilar (RASHED, 2004).....	67
Figura 3.17 – Modelos de pilares internos em lajes lisas (ROMBASH, 2004).....	68
Figura 3.18 – Carregamento distribuído equivalente (PEDROZO, 2008).....	69
Figura 3.19 – Momentos fletores na laje por analogia de grelha (PUER, 2009).....	70
Figura 3.20 – Momentos fletores transferidos ao pilar (PUER, 2009).....	71
Figura 3.21 – Comparativo de diagramas de momentos fletores para o pórtico 1 (Silva, 2013).....	72
Figura 3.22 – Tipos de modelagem estudados por Silva (2013).....	72
Figura 3.23 – Momentos fletores sobre o pilar segundo diferentes modelagens (SKORPEN & DEKER, 2014).....	73
Figura 3.24 – Diagrama momento x carregamento pelos métodos dos pórticos equivalentes do ACI, dos elementos finitos e ensaio em laje em tamanho real (SHERIF & DILGER, 2000).....	74
Figura 3.25 – Laje do exemplo 2 com pilares dispostos irregularmente (FARIA, 2004).....	74
Figura 3.26 – Fator de ignorância $b^*$ em função da variável Incerteza de modelo (MAES, 1991).....	76
Figura 3.27 – Proporção dos fatores que contribuem com a probabilidade de falha (MELCHERS, 2007).....	78
Figura 3.28 – Variável erro de modelo NBR 6118/07 para pilares com rigidez aproximada - (A) Distribuição de densidade de probabilidade, (B) Distribuição acumulada de probabilidade (SANTOS, 2012).....	80
Figura 3.29 – Relação entre erro de modelo e avariável taxa de armadura longitudinal dos pilares pelo modelo da rigidez aproximada da NBR 6118/ 07 (SANTOS, 2012).....	80
Figura 3.30 – Análise de sensibilidade da viga metálica (NOWAK & RACOKZY, 2013).....	81

Figura 3.31 – Análise de sensibilidade da viga de concreto protendido (NOWAK & RACOKZY, 2013).....	82
Figura 3.32 – Análise de sensibilidade da viga de madeira (NOWAK & RACOKZY, 2013).....	82
Figura 3.33 – Cargas nos pilares obtidas por cada participante (FRÖDERBERG&THELANDERSSON, 2015).....	83
Figura 3.34 – Momentos nos pilares parede obtidos por cada participante (FRÖDERBERG&THELANDERSSON, 2015).....	84
Figura 4.1 – Trechos rígidos (NBR 6118 /14).....	88
Figura 4.2 – Pilar modelado como apoio pontual.....	88
Figura 4.3 – Arredondamento de momentos fletores (NBR 6118 /14) .....	89
Figura 4.4 – Binário de forças resultante do momento no pilar aplicado como reação na laje (PUEL, 2009).....	89
Figura 4.5 – Carregamento final com $q_E$ e $q_D$ aplicado como reação na laje (PUEL, 2009).....	90
Figura 4.6 – Pilar modelado como barra substituído por um apoio do segundo gênero (PUEL, 2009).....	91
Figura 4.7 – Rigidez da mola (PUEL, 2009).....	91
Figura 4.8 – Rotação do nó no vínculo do pilar (PUEL, 2009).....	92
Figura 4.9 – Área projetada do pilar no centro da altura da laje.....	93
Figura 4.10 – Pilar interno modelado como elementos sólidos.....	94
Figura 4.11 – Pilar modelado como quatro apoios pontuais.....	94
Figura 4.12 – Modelo de pilar com quatro molas.....	95
Figura 4.13 – Comparação dos resultados obtidos em ensaios com a NBR 6118 (FIB Bulletin 12, 2001).....	99
Figura 4.14 – Influência de $c_1/c_2$ para uma excentricidade de 1 cm em um dos eixos.....	103
Figura 4.15 – Influência de $c_1/c_2$ para uma excentricidade de 15 cm em um dos eixos.....	104
Figura 4.16 – Influência de $c_1/c_2$ para uma excentricidade de 1 cm nos dois eixos.....	105
Figura 4.17 – Influência de $c_1/c_2$ para uma excentricidade de 15 cm nos dois eixos.....	105
Figura 4.18 – Influência do momento de inércia do pilar na excentricidade da reação do pilar.....	106
Figura 4.19 – Influência da assimetria do pilar em relação ao centro da laje na excentricidade da reação do pilar.....	107
Figura 4.20 – Influência do carregamento total da laje na excentricidade da reação do pilar.....	107
Figura 4.21 – Configuração da laje para os estudos de variabilidade de pilares internos.....	108
Figura 4.22 – Esquema adotado para a modelagem dos pilares (NBR 6118 /14).....	109
Figura 4.23 – Modelo numérico genérico da laje.....	110
Figura 4.24 – Dispersão dos momentos desbalanceados dos diversos modelos na configuração de laje A1-R.....	111
Figura 4.25 – Dispersão da força de reação do pilar dos diversos modelos na configuração de laje A1-R.....	111
Figura 4.26 – Tensões de cisalhamento uniformemente distribuídas no perímetro crítico.....	114
Figura 4.27 – Modelos para análise das tensões de cisalhamento no perímetro crítico.....	115
Figura 4.28 – Pontos ao longo do perímetro de controle para obtenção dos esforços cortantes.....	115
Figura 5.1 – Esforços normais do pilar para o caso do pilar A1-R.....	121
Figura 5.2 – Momentos desbalanceados da laje para o caso do pilar A1-R.....	121
Figura 5.3 – Variação de $h_{\delta,1}$ em função de $N$ e $M_y$ para o pilar A1-R com todos modelos.....	122

Figura 5.4 – Variação de $h_{\delta,2}$ em função de $N$ e $M_y$ para o pilar A1-R sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16.....	122
Figura 5.5 – Histograma de distribuição de probabilidades para $\lambda_{\delta 1}$ para o caso do pilar A1-R.....	123
Figura 5.6 – Convergência de $\beta$ para $g(x)$ para o caso do pilar A1-R.....	125
Figura 5.7 – Esforços normais do pilar para o pilar A2-R.....	128
Figura 5.8 – Momentos desbalanceados da laje para o pilar A2-R.....	129
Figura 5.9 – Variação de $h_{\delta,1}$ em função de $N$ e $M_y$ para o pilar A2-R com todos modelos.....	129
Figura 5.10 – Variação de $h_{\delta,2}$ em função de $N$ e $M_y$ para o pilar A2-R sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16.....	130
Figura 5.11 – Histograma de distribuição de probabilidades para $\lambda_{\delta 1}$ para o pilar A2-R.....	130
Figura 5.12 – Convergência de $\beta$ para $g(x)$ para o pilar A2-R.....	132
Figura 5.13 – Esforços normais do pilar para o pilar B2-Q.....	137
Figura 5.14 – Momentos desbalanceados da laje para o pilar B2-Q.....	138
Figura 5.15 – Variação de $h_{\delta,1}$ em função de $N$ e $M_y$ para o pilar B2-Q com todos modelos.....	138
Figura 5.16 – Variação de $h_{\delta,2}$ em função de $N$ e $M_y$ para o pilar B2-Q sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16.....	139
Figura 5.17 – Histograma de distribuição de probabilidades para $\lambda_{\delta 1}$ para o pilar B2-Q.....	140
Figura 5.18 – Convergência de $\beta$ para $g(x)$ para o pilar B2-Q.....	142
Figura 5.19 – Esforços normais do pilar para o caso B2-R.....	146
Figura 5.20 – Momentos desbalanceados em torno do eixo y da laje para o pilar B2-R.....	147
Figura 5.21 – Momentos desbalanceados em torno do eixo x da laje para o pilar B2-R.....	147
Figura 5.22 – Variação de $h_{\delta,1}$ para o pilar B2-R com todos modelos.....	148
Figura 5.23 – Variação de $h_{\delta,2}$ para o pilar A1-R sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16.....	149
Figura 5.24 – Histograma de distribuição de probabilidades para $\lambda_{\delta 1}$ para o pilar B2-Q.....	150
Figura 5.25 – Convergência de $\beta$ para $g(x)$ para o pilar B2-R.....	152
Figura 5.26 – Diagrama $\alpha \times \beta$ .....	156
Figura 6.1 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m) para malha de 6x6cm.....	159
Figura 6.2 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m) para malha de 50x50cm.....	160
Figura 6.3 – Tensões solicitantes no perímetro crítico, malhas de 6x6cm e 50x50cm respectivamente.....	160
Figura 6.4 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m) para malha de 6x6cm.....	161
Figura 6.5 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m) para malha de 50x50cm.....	161
Figura 6.6 – Tensões solicitantes no perímetro crítico, malhas de 6x6cm e 50x50cm respectivamente.....	162
Figura 6.7 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m), malha 6x6cm.....	163
Figura 6.8 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m), malha 50x50cm.....	163
Figura 6.9 – Tensões solicitantes no perímetro crítico, malhas de 6x6cm e 50x50cm.....	164
Figura 6.10 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m), malha 6x6cm.....	164
Figura 6.11 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m) malha 50x50cm.....	165
Figura 6.12 – Tensões solicitantes no perímetro crítico para malhas de 6x6cm e 50x50cm,.....	165
Figura 6.13 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m), malha 6x6cm.....	166

Figura 6.14 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m), malha 50x50cm.....	166
Figura 6.15 – Tensões solicitantes no perímetro crítico, malhas de 6x6cm e 50x50cm.....	167
Figura 6.16 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m) e malha 6x6cm.....	167
Figura 6.17 – $V_{xz}$ e $V_{yz}$ (kN/m) e malha de 50x50cm.....	168
Figura 6.18 – Tensões solicitantes no perímetro crítico com malhas de 6x6cm e 50x50cm.....	168
Figura 6.19 – Histograma de distribuição de probabilidades para $\lambda_{\tau A}$ .....	169
Figura 6.20 – Histograma de distribuição de probabilidades para $\lambda_{\tau B}$ .....	170
Figura 6.21 – Diagramas de dispersão dos valores de $\lambda_{\tau}$ para tensões médias.....	172
Figura 6.22 – Diagramas de dispersão dos valores de $\lambda_{\tau}$ para tensões máximas.....	173
Figura 6.23 – Convergência de $\beta$ para $g(x)$ para o pilar B2-R. ....	176

# Lista de Quadros

Quadro 2.1 – Valores de $k$ .....	20
Quadro 2.2 – Distribuição dos momentos nas faixas pela norma inglesa.....	41
Quadro 2.3 – Distribuição dos momentos nas faixas pela norma européia.....	41
Quadro 2.4 – Distribuições contínuas de probabilidades (BECK, 2012).....	46
Quadro 2.5 – Valores de $\beta$ para estados limites últimos.....	49
Quadro 3.1 – Tensões de cisalhamento nos pontos sobre o perímetro crítico para laje submetida apenas a momentos (BØLVIKEN, 2013).....	61
Quadro 3.2 – Tensões solicitantes máximas no perímetro crítico.....	62
Quadro 3.3 – Dados dos erros encontrados nas tarefas (STEWART, 1992).....	77
Quadro 3.4 – Probabilidades de falha (STEWART, 1992).....	77
Quadro 3.5 – Fatores que influenciam a segurança da estrutura (MELCHERS, 2007).....	78
Quadro 3.6 – Resultados "Reais" $R$ da análise por elementos finitos (FRÖDERBERG&THELANDERSSON, 2015).....	85
Quadro 4.1 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade.....	100
Quadro 4.2 – Identificação dos diferentes modelos para os pilares internos nos casos de estudo.....	101
Quadro 4.3 – Casos estudados na análise de sensibilidade.....	102
Quadro 4.4 – Dimensões e nomenclatura dos pilares internos.....	109
Quadro 4.5 – Nomenclatura de pilares internos.....	110
Quadro 4.6 – Parâmetros da laje.....	116
Quadro 4.7 – Modelos de pilares adotados.....	116
Quadro 4.8 – Parâmetros variados nas análises.....	116
Quadro 5.1 – Esforços e tensões para os diferentes modelos para o caso do pilar A1-R.....	120
Quadro 5.2 – Parâmetros de $\lambda_{\delta 2}$ para o caso do pilar A1-R.....	122
Quadro 5.3 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o caso do pilar A1-R.....	124
Quadro 5.4 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar A1-R.....	125
Quadro 5.5 – EMU para o pilar A1-R desconsiderando esforços obtidos pelos modelos 2 e 9.....	126
Quadro 5.6 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar A1-R sem Modelos 2 e 9.....	126
Quadro 5.7 – Esforços e tensões solicitantes para o pilar A2-R.....	127
Quadro 5.8 – Parâmetros de $\lambda_{\delta 2}$ para o caso do pilar A2-R.....	130
Quadro 5.9 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar A2-R.....	131
Quadro 5.10 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar A2-R.....	133
Quadro 5.11 – EMU para o pilar A2-R desconsiderando esforços obtidos pelos modelos 2 e 9.....	134
Quadro 5.12 – Índices de confiabilidade e probabilidades de falha para o caso A2-R excluindo modelos 2 e 9.....	134
Quadro 5.13 – Dados dos EMU para o caso A2-R desconsiderando esforços obtidos pelos modelos 2,9,14,15 e 16.....	134

Quadro 5.14 – Índices de confiabilidade e probabilidades de falha para o caso A2-R excluindo os modelos 2,9,14,15 e 16.....	135
Quadro 5.15 – Esforços e tensões solicitantes segundo os diferentes modelos para o pilar B2-Q.....	138
Quadro 5.16 – Esforços nos diferentes modelos para o pilar B2-Q.....	139
Quadro 5.17 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar B2-Q.....	141
Quadro 5.18 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar B2-Q.....	142
Quadro 5.19 – Dados dos EMU para o pilar B2-Q desconsiderando modelos 2 e 9.....	143
Quadro 5.20 – Índice de confiabilidade e probabilidades de falha para o pilar B2-Q excluindo modelos 2 e 9.....	143
Quadro 5.21 – EMU para o pilar B2-Q desconsiderando modelos 2,9,14,15 e 16.....	144
Quadro 5.22 – Índice de confiabilidade e probabilidades de falha para o pilar B2-Q excluindo os modelos 2,9,14,15 e 16.....	144
Quadro 5.23 – Esforços e tensões segundo os diferentes modelos para o pilar B2-R.....	145
Quadro 5.24 – Esforços nos diferentes modelos para o pilar B2-Q.....	148
Quadro 5.25 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar B2-R.....	151
Quadro 5.26 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o pilar B2-R.....	152
Quadro 5.27 – EMU para o pilar B2-R desconsiderando esforços obtidos pelo modelo de apoio pontual.....	153
Quadro 5.28 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar B2-R.....	154
Quadro 5.29 – EMU para o pilar B2-R desconsiderando pórticos equivalentes e apoio pontual.....	154
Quadro 5.30 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar B2-R.....	155
Quadro 6.1 – Probabilidades de falha e índice de confiabilidade para o caso do pilar A1-R.....	170
Quadro 6.2 – Probabilidades de falha e índice de confiabilidade para o caso do pilar A1-R.....	171
Quadro 6.3 – Distribuições de probabilidade de $\lambda_{\tau i}$ para as tensões médias.....	174
Quadro 6.4 – Distribuições de probabilidade de $\lambda_{\tau i}$ para as tensões máximas.....	175
Quadro 6.5 – Distribuições de probabilidade de $\lambda_{\tau i}$ para as tensões máximas.....	176
Quadro 6.6 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar A1-R.....	176

# *Lista de Siglas*

ABNT –	ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS
AG –	ANALOGIA DE GRELHA
ACI –	AMERICAN CONCRETE INSTITUTE
BS –	BRITISH STANDARD
CEB –	COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON
EC –	EUROCODE
EMU –	ENGINEERING MODELLING UNCERTAINTY
FORM –	FIRST ORDER RELIABILITY METHOD
FIB –	FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON
JCSS –	JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY
MEC –	MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO
MEF –	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
MPE –	MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES
NBR –	NORMA BRASILEIRA REGISTRADA
SANS –	SOUTH AFRICAN BUREAU OF STANDARDS
SORM –	SECOND ORDER RELIABILITY METHOD

# *Lista de Símbolos*

## **LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS**

$A'$ -	área referente ao quarto de área da seção do pilar;
$A_{sw}$ -	área da armadura de punção por camada
$B$ -	diâmetro equivalente de um pilar retangular
$C$ -	perímetro de controle na face do pilar
$C'$ -	perímetro de controle sem armadura de punção a $2d$ da face do pilar
$C''$ -	perímetro de controle distância de $2d$ do último perímetro de armadura de punção
$C_1$ -	dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;
$C_2$ -	dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força
$D$ -	rigidez de uma placa
$E$ -	valor esperado
$E_{cs}$ -	módulo de elasticidade secante do concreto
$E_M$ -	Erro de modelo
$E_{M,i}$ -	Erro do modelo $i$
$F_X$ -	função de distribuição acumulada de probabilidades
$F$ -	vetor de cargas externas
$F_0$ -	vetor de engastamento perfeito
$F_{sd}$ -	força ou reação concentrada de cálculo
$I_{sup}$ -	momento de inércia do pilar superior
$I_{inf}$ -	momento de inércia do pilar inferior
$I'_y$ -	momento de inércia em torno de $y$ referente ao quarto da seção do pilar;
$I'_x$ -	momento de inércia em torno de $x$ referente ao quarto da seção do pilar.
$J$ -	momento de inércia à torção
$K$ -	matriz de rigidez da estrutura
$L_c$ -	comprimento do pilar
$L_{ec}$ -	comprimento do pilar equivalente
$L_{sup}$ -	comprimento do pilar superior;



$L_{sup}$	comprimento do pilar inferior.
$M_{sd}$	momento de cálculo transmitido da laje ao pilar
$M_{laje}$	momento fletor atuante na laje obtido através do somatório do momento do pilar superior e do pilar inferior ao nó
$N_G$	parcela do esforço normal do pilar referente às cargas permanentes
$N_Q$	parcela do esforço normal do pilar referente às cargas acidentais
$P$	esforço axial no pilar
$P_f$	probabilidade de falha
$Q$	carga resultante de $q$ na área $dx$ e $dy$
$Q_x$	esforço cortante no plano perpendicular ao eixo $x$
$Q_y$	esforço cortante no plano perpendicular ao eixo $y$
$R$	variável resistência
$R_\delta$	esforço de referência ou real
$S$	variável solicitação
$\mathbf{S}$	vetor de esforços nas extremidades das barras
$\mathbf{S}_0$	vetor de esforços de imobilização nas extremidades das barras
$U$	energia de deformação por flexão dos elementos
$\mathbf{U}$	vetor de deslocamentos nodais
$V$	variância
$V_u$	tensão de ruptura das lajes ensaiadas
$V_{xz}$	esforço cortante no plano perpendicular a $x$ na direção de $z$
$V_{yz}$	esforço cortante no plano perpendicular a $y$ na direção de $z$
$W_p$	módulo de resistência plástica do concreto do perímetro de controle
$X$	variável aleatória

### **LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS**

$a$	dimensão do pilar no plano de atuação do momento
$b$	dimensão do pilar no plano ortogonal ao de atuação do momento
$b_f$	largura da faixa
$b_w$	maior dimensão da seção transversal

$c$	perímetro de controle na face do pilar
$c'$	perímetro de controle sem armadura de punção a $2d$ da face do pilar
$c''$	perímetro de controle distância de $2d$ do último perímetro de armadura de punção
$c_1$	dimensão do pilar paralela à excentricidade da força
$c_2$	dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força
$c_A$	dimensão do apoio na direção transversal ao pórtico
$d$	altura útil média da laje
$\mathbf{d}$	vetor de deslocamentos correspondente aos nós de extremidade da barra
$dx$	dimensão infinitesimal na direção do eixo $x$
$dy$	dimensão infinitesimal na direção do eixo $y$
$e$	excentricidade da reação de esforço normal do pilar
$f_c$	resistência à compressão do concreto
$f_{cd}$	resistência de cálculo do concreto à compressão cilíndrica
$f_{ck}$	resistência à compressão característica do concreto
$f_{cm}$	resistência à compressão média do concreto
$f_{RS}$	função conjunta de densidade de probabilidades da resistência e solicitação
$f_X$	função de densidade de probabilidades
$f_{ywd}$	resistência de cálculo da armadura de punção
$\bar{f}_\delta(K)$	esforços obtidos nos demais modelos
$g$	equação de estado limite
$g'_1$	equação de estado limite último considerando o erro de modelo proposto pelo JCSS
$g'_2$	equação de estado limite último considerando o EMU $\lambda_{\delta 1}$
$g'_{\tau A}$	equação de estado limite último considerando o EMU $\lambda_{\tau A}$
$g'_{\tau B}$	equação de estado limite último considerando o EMU $\lambda_{\tau B}$
$g'_{\tau i}$	equação de estado limite último considerando o EMU $\lambda_{\tau i}$
$h$	espessura ou altura da laje
$h_f$	menor dimensão da seção transversal
$h_\delta$	função tensão solicitante, tendo os esforços dos modelos as variáveis independentes
$h_{\delta,1}$	função tensão solicitante, considerando todos os modelos

$h_{\delta,2}$ –	função tensão solicitante, excluindo modelos 2, 9, 14, 15 e 16
$k$ –	coeficiente que fornece a parcela de $M_{sd}$ transmitida ao pilar por cisalhamento
$k_i$ –	curvaturas principais da superfície de estado limite no ponto de projeto
$k_c$ –	rigidez dos pilares acima ou abaixo do pórtico
$k_{ec}$ –	rigidez do pilar equivalente
$k_T$ –	rigidez do elemento torcional
$k_{xy}, k_{yx}$ –	rigidez à rotação do nó da ligação laje pilar em torno dos eixos onde há assimetria
$k_{zz}$ –	rigidez à compressão do pilar
$l$ –	vão entre pilares
$l_2$ –	vão na direção transversal ao pórtico
$m_x$ –	momento fletor na laje em torno do eixo x
$m_y$ –	momento fletor na laje em torno do eixo y
$m_{xy}$ –	momento torçor na laje
$q$ –	carga transversal distribuída
$q_m$ –	valor da extremidade do carregamento aplicado como reação na laje
$\mathbf{r}$ –	matriz de rigidez do elementos da barra
$u$ –	valor numérico do perímetro de controle na distância de $2d$ da face do pilar
$w$ –	deslocamento na placa na direção do eixo z
$z$ –	braço de alavanca dos momentos internos

#### **LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS**

$\Delta$ –	deslocamento
$\Theta_1$ –	incerteza de modelo pelo JCSS (2001)
$\Pi$ –	produtório
$\Sigma$ –	somatório
$\Phi$ –	função de distribuição acumulada da variável normal padrão com média igual a zero e desvio padrão igual a um

#### **LETRAS GREGAS MINÚSCULAS**

$\alpha$ –	participação do momento desbalanceado na tensão solicitante total de punção
------------	---

$\alpha_v$ –	fator de correção da resistência do concreto
$\alpha_s$ –	ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje
$\beta$ –	índice de confiabilidade
$\gamma_{xy}$ –	distorção por cisalhamento no plano perpendicular ao eixo x na direção do eixo y
$\delta$ –	vetor de deslocamentos
$\varepsilon_x$ –	deformação específica na direção do eixo x
$\varepsilon_y$ –	deformação específica na direção do eixo y
$\theta$ –	rotação
$\lambda_0$ –	coeficiente de segurança central
$\lambda_\delta$ –	<i>Engineering Modelling Uncertainty</i> (EMU)
$\lambda_{\delta 1}$ –	variável incerteza de modelo EMU pela variação dos esforços
$\lambda_{\tau A}$ –	variável incerteza de modelo EMU pela variação das tensões médias por todos os modelos com malha grossa
$\lambda_{\tau B}$ –	variável incerteza de modelo EMU pela variação das tensões médias por todos os modelos com malha grossa
$\lambda_{\tau i}$ –	variável incerteza de modelo EMU pela variação das tensões para cada modelo
$\mu$ –	média ou valor esperado
$\mu_R$ –	média ou valor esperado da parcela resistente
$\mu_S$ –	média ou valor esperado da parcela solicitante
$\nu$ –	coeficiente de Poisson
$\xi$ –	valor implícito de segurança no cálculo da punção pela NBR 6118/14
$\rho$ –	taxa de armadura de flexão
$\rho'$ –	raio de curvatura
$\sigma$ –	desvio padrão
$\sigma_R$ –	desvio padrão da parcela resistente
$\sigma_S$ –	desvio padrão da parcela solicitante
$\sigma_x$ –	tensão normal na direção do eixo x
$\tau_{xy}$ –	tensão de cisalhamento no plano perpendicular ao eixo x na direção do eixo y
$\tau_{Rd1}$ –	tensão resistente em elementos estruturais sem armadura de punção no contorno C'
$\tau_{Rd2}$ –	tensão resistente de compressão diagonal do concreto no contorno C

$\tau_{Rd3}$ –	tensão resistente em elementos estruturais com armadura de punção no contorno C'
$\tau_{sd}$ –	tensão solicitante de punção
$\varphi$ –	ângulo formado pelo ponto no perímetro crítico em relação ao eixo x
$\varphi_P$ –	rotação no nó do vínculo do pilar
$\chi$ –	vetor de curvaturas

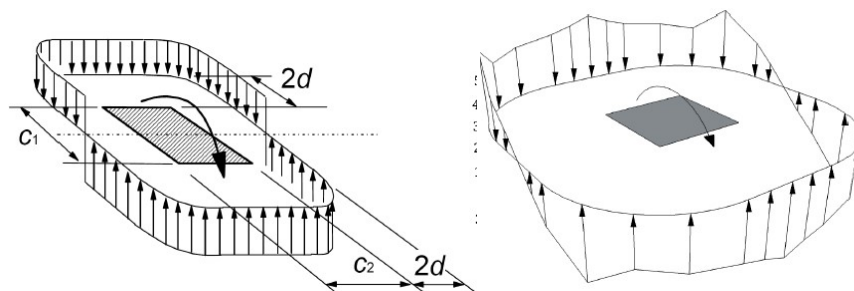
# 1 Introdução

Estruturas de edifícios em concreto armado em que se adotam a solução por lajes lisas são atualmente muito utilizadas em diversos países, principalmente pelas suas vantagens econômicas e funcionais quando comparadas à solução reticulada tradicional, com pilares, vigas e lajes. Atualmente, com o avanço dos *softwares* de análise e cálculo de estruturas e dos computadores pessoais, o projeto de lajes lisas é realizado em grande parte por processos numéricos, o que aumentou enormemente o seu uso. O avanço tecnológico facilitou o acesso a dados como esforços solicitantes em lajes lisas na análise estrutural, mas ainda existem problemas para se obter ou interpretar alguns desses dados, em especial na região da ligação laje-pilar (MURRAY et. al., 2005).

Apesar de sua aparência simples, as lajes lisas possuem um comportamento bastante complexo e de difícil análise na região dos apoios, principalmente no que diz respeito à flexão e ao cisalhamento. Desde o estudo pioneiro sobre punção de Talbot em 1913, muitos estudos teóricos e experimentais têm sendo desenvolvidos, tanto para a análise de esforços em lajes lisas como para o dimensionamento à punção, com e sem transferência de momentos para o pilar. Tal interesse se deve aos problemas estruturais e de análise provocados pela descontinuidade resultante em se apoiar uma laje relativamente esbelta diretamente em apoios também relativamente esbeltos. Esta descontinuidade é considerada um dos problemas mais críticos que existem em estruturas de concreto armado, onde podem ocorrer momentos fletores bastante elevados, e o estado triaxial de tensões é extremamente complicado de se analisar (PARK & CHOI, 2006; FELICIANO, 2011; SACRAMENTO et al, 2012). De acordo com o Bulletin 12 da FIB (2001), as lajes lisas violam o princípio de que o nível de segurança de uma estrutura deve ser igual ao longo da mesma, por conta da falta de ductilidade nas ligações laje-pilar. A falta de ductilidade pode levar ao rompimento frágil por punção, geralmente caracterizado pela ausência de escoamento generalizado da armadura, sendo basicamente ocasionado pela destruição local do concreto da zona comprimida em torno do pilar ou da área carregada, provocando, portanto, uma ruptura súbita (PINTO, 1993).

A característica de ruptura frágil faz com que a punção seja um fator determinante nas verificações de ligações laje-pilar em lajes lisas. Quando esta ligação está submetida a um carregamento excêntrico, o número de variáveis envolvidas é muito maior em relação a carregamentos simétricos, o que reduz a precisão dos métodos de verificação para este caso, e isto acaba por dificultar o desenvolvimento de equações analíticas para obtenção das tensões nas regiões da laje próximas ao pilar. Assim, diversas normas estimam a tensão resistente e solicitante ao cisalhamento por uma seção em torno do pilar, chamada perímetro crítico, e ajustam esse valor com coeficientes calibrados por trabalhos experimentais (OLIVEIRA, 2013).

Atualmente existe um esforço de alguns pesquisadores em estudar as tensões de cisalhamento obtidas por modelos numéricos elástico-lineares no perímetro crítico (Figura 1.1) e relacioná-los com tensões obtidas pelas equações fornecidas por algumas normas (BELK, 2009; BØLVIKEN, 2013). Estes estudos têm mostrado que os modelos fornecem uma variação mais complexa de tensões ao longo dos perímetros de controle que as idealizadas na NBR 6118.



**Figura 1.1 – Diagrama de tensões solicitantes no perímetro crítico  $c'$  (BØLVIKEN, 2013)**

Dado o comportamento complexo e a dificuldade em se obterem as tensões solicitantes de punção em um perímetro crítico, as equações fornecidas pelas normas normalmente têm como dados de entrada a força de reação do pilar e o momento desbalanceado na laje (ALBUQUERQUE, 2014). No entanto, até estes esforços podem ter variabilidades muito grandes, dependendo da modelagem do pilar, e são alvos de constantes estudos (SIMMONDS, 1970; HRABOK & HRUDEY, 1983; ENOCHSSON, 2001; HENNRICH, 2003; RASHED, 2004; ROMBACH, 2004; PEDROZO, 2008; PUEL, 2009; SILVA, 2013; SKORPEN & DEKER, 2014). Não apenas a modelagem do pilar pode influenciar, mas o modelo de análise (e.g. Método dos Elementos Finitos, Analogia de Grelha, Pórticos Equivalentes) pode conduzir a resultados muito diferentes, mesmo em formas estruturais relativamente simples (HRABOK & HRUDEY, 1983; SHERIF & DILGER, 2000; FARIA, 2004; PEDROZO, 2008; BUENO, 2008; PUEL, 2009; SKORPEN & DEKER, 2014). O Eurocode 2 (2004), em seu anexo I, indica que as lajes devem ser analisadas usando métodos comprovados de análise, como analogia de grelha, elementos finitos, linhas de ruptura ou pórticos equivalentes, levando em conta adequadamente as propriedades geométricas e físicas dos materiais. A NBR 6118 (2014), em seu item 14.7.8, também indica que a análise estrutural de lajes lisas deve ser feita por processo numérico adequado, como diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno ou, nos casos em que os pilares estiverem dispostos em filas ortogonais, de maneira regular e com vãos pouco diferentes, por pórticos equivalentes. Além da ampla referência a diferentes métodos de análise por essas duas normas, ainda não há indicações de como os esforços obtidos por cada método devem ser tratados no caso da punção, tampouco referências específicas à modelagem das ligações laje-pilar.

No dimensionamento à flexão, o comportamento plástico das lajes é responsável por absorver parte das diferenças dos modelos pela redistribuição dos esforços (ROMBACH, 2004), mas não fica claro se sempre é possível levar em conta a redistribuição dos esforços no caso da punção. A verificação da punção parece ser um procedimento independente da flexão, no entanto depende do modelo, e pode ser mais sensível a esses modelos que o comportamento à flexão devido à sua característica de ruptura frágil.

Segundo Bulleit (2008), grande parte dos modelos estruturais adotados na análise e no dimensionamento estrutural simplifica ou simplesmente exclui muitos aspectos da estrutura, existindo ainda a possibilidade de que o modelo adotado seja conceitualmente incorreto. No campo

da confiabilidade estrutural, tais simplificações nos modelos estruturais provocam incertezas definidas como incertezas de modelo ou erros de modelo (JCSS, 2001). As incertezas de modelo normalmente são fruto de simplificações de efeitos de heterogeneidade de materiais, interações complexas, consideração de restrições de nós e apoios não realista, negligenciamento de efeitos tridimensionais, para citar alguns. As incertezas de modelo podem surgir também da compreensão imperfeita ou incorreta do comportamento estrutural. A amplitude destas incertezas - as quais podem depender do tipo de estrutura (pórticos, lajes, placas, elementos sólidos) - afeta a qualidade e a variabilidade dos valores dos esforços solicitantes obtidos em uma análise estrutural (FRÖDERBERG & THELANDERSSON, 2015).

Segundo o JCSS (2001), as incertezas de modelo podem ocorrer de duas maneiras distintas: na consideração de modelos cujas equações possuem efeitos de natureza aleatória negligenciados ou em modelos que possuem simplificações nas relações matemáticas. Bulleit (2008) também classifica as incertezas de modelo de duas maneiras diferentes, sendo estas passíveis de ocorrer em função de quão bem calibrada uma equação é em relação a dados experimentais, e também em função de quão bem um modelo estrutural prevê o comportamento de uma estrutura. A segunda definição de Bulleit (2008) explicita o foco da pesquisa no presente trabalho, em que se leva em conta o fato de que é possível definir diferentes modelos para representar um mesmo problema técnico.

O fato de que as incertezas de modelo sejam grandemente influenciadas pela escolha do modelo estrutural para análise, pelos dados disponíveis, pela maturação do modelo em função de pesquisas ou em função da experiência, faz com que sejam altamente variáveis, sujeitas a mudanças e tenham uma participação relevante nos resultados de uma análise estrutural (MAES, 1991). A escolha por um determinado modelo para análise de um sistema estrutural normalmente é baseada em critérios normativos, embora casos onde não haja solução definitiva permitem que as escolhas sejam feitas baseadas no julgamento do engenheiro calculista. Nestes casos, existe uma variabilidade da avaliação do engenheiro, que pode influenciar em parâmetros como quais aspectos da estrutura devem ser levados em conta ou com qual rigor deve ser modelado o comportamento dos elementos estruturais. Estudos feitos por Stewart & Melchers (1988), Stewart (1992) e Fröderberg & Thelandersson (2015) levaram à conclusão que existe uma grande variabilidade nos esforços e dimensionamentos obtidos em uma mesma estrutura quando as análises são realizadas por diferentes engenheiros calculistas. Bulleit (2008) define as variabilidades na interpretação dos problemas como erros humanos, explicando como muitas vezes é difícil classificar esses tipos de erros. Como exemplo, Bulleit (2008) cita o colapso da ponte Tacoma Narrows, o qual poderia ser interpretado de diversas maneiras, como por erro de modelo, como erro humano ou como problema de heurística, enquanto ele próprio diz ter sido uma combinação dos três fatores, dada a inter-relação em condições de projeto.

Segundo Nowak e Rakoczy (2013), mais de 90% dos casos de falha estrutural são devidos à erros humanos, destes 50% na fase de projeto e 50% na fase de execução. Fraczek (1979), Nowak & Carr (1985), Stewart (1992) afirmam que erros humanos são responsáveis por uma grande parcela dos casos de falha estrutural, onde estes podem ser em razão de carregamentos acima dos previstos na fase de projeto, má manutenção ou adoção de métodos simplificados ou aproximados de análise, este último de prática comum. Existem diversos registros de casos de falhas estruturais por punção,



sendo que o primeiro que se tem registro, segundo Melo (1990), ocorreu em Indianópolis, nos Estados Unidos, em 1911, onde as lajes se desligaram completamente dos pilares, levando o edifício Prest-o-Lite ao colapso. Em 1981, o edifício residencial de cinco andares Harbour Cay Condominium veio ao colapso por punção, ainda na fase de construção, na cidade de Cocoa Beach, nos Estados Unidos, deixando 11 mortos e 23 feridos. A loja de departamentos Sampoong, em Seoul, na Coreia do Sul, foi outro caso de falha por punção, esta ocorrida em 1995, causando 501 mortes e deixando aproximadamente 1400 pessoas feridas. Em 1997, outro caso de falha por punção foi registrado, desta vez em Wolverhampton, na Inglaterra, onde o edifício de garagens Piper's Row Car Park sofreu um colapso parcial. A Figura 1.2 apresenta alguns destes casos de ruptura por punção.



**Figura 1.2 – Piper's Row Car Park (CAPRANI, 2008) e Harbour Cay Condominium (KUKORLO, 2009)**

A menção às falhas por punção não obrigatoriamente as classificam em uma causa específica, mas atenta para o fato que estes tipos de falha ocorrem e, portanto, os fatores que diminuem a segurança deste tipo de estrutura devem ser minimizados. Desta forma, em se tratando de diferentes métodos de análise e modelagem estrutural, é necessário identificar parâmetros cuja variabilidade possa influenciar na segurança da estrutura, de tal forma que se permitam proporcionar critérios adequados à segurança (ELLINGWOOD & GALAMBOS, 1982; NOWAK & RAKOCZY, 2013).

Este trabalho apresenta um estudo sobre os esforços e tensões solicitantes segundo diferentes modelagens e métodos de análise no regime elástico linear com uma visão integrada de flexão e punção em pilares internos pela NBR 6118 (2014) para algumas configurações de lajes lisas. Um ponto importante a ser salientado é o fato de que, muitas vezes, a verificação da punção é feita sem uma análise adequada do modelo usado para a verificação da flexão da laje. Uma vez que a normalização usa esforços normais e momentos fletores que atuam no pilar, e esses esforços são decorrentes da análise estrutural, uma visão integrada é essencial para uma verificação da punção. Apesar da sua relevância, esse ponto tem sido negligenciado nas pesquisas e normalizações atuais.

É feito um estudo sobre a variabilidade dos resultados obtidos de análises estruturais por

diferentes modelos, segundo duas abordagens. A primeira utiliza uma metodologia similar à apresentada por Fröderberg & Thelandersson (2015). Os esforços solicitantes são obtidos por análises elástico lineares segundo diferentes modelagens de pilar - estas retiradas da literatura - e diferentes métodos de análise, onde são feitos a análise dos esforços e estudos de variabilidade, verificando-se a adequabilidade das modelagens e métodos para certas configurações de lajes lisas. Os métodos de cálculo adotados são o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Processo de Analogia de Grelha (AG) e o Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), este último considerando a metodologia da NBR 6118, do Eurocode 2 e do ACI 318. Os pilares foram modelados de sete maneiras diferentes, totalizando 16 modelos de análise para cada caso de estudo. Nesta primeira abordagem, inicialmente são feitos estudos para definir algumas configurações de lajes lisas, de tal forma que se amplifiquem os efeitos das variabilidades nas análises. Na segunda abordagem são estudadas as tensões solicitantes obtidas no perímetro crítico  $c'$  (a 2d da face do pilar) da NBR 6118 (2014) por análises elástico lineares utilizando apenas o Método dos Elementos Finitos. É adotada a mesma metodologia apresentada por Bølviken (2013), variando ainda a espessura da laje, os esforços aplicados, a relação entre lados do pilar e a modelagem do pilar, totalizando 778 modelos. Nesta segunda abordagem, intenciona-se encontrar uma relação entre as tensões solicitantes obtidas no perímetro crítico em uma análise elástico linear por um processo numérico com as tensões resistentes fornecidas pela NBR 6118 (2014), levando em conta a variabilidade das tensões solicitantes obtidas nos modelos.

Segundo Fröderberg & Thelandersson (2015), em projetos reais, as incertezas envolvidas tornam impossível encontrar uma única solução para determinado problema e, portanto, deve-se prever a influência de uma variedade de soluções aceitáveis possíveis para uma mesma estrutura. Trata-se de um tema cuja interrelação dos assuntos abordados, mesmo significativos individualmente, é praticamente inexplorada. Portanto julga-se importante um estudo com uma visão integrada de flexão e punção, que leve em conta a variabilidade dos esforços e tensões na ligação laje-pilar obtidos por diferentes métodos e diferentes modelagens e a influência desta variabilidade no cálculo da punção.

## 1.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é contribuir para a compreensão da influência de diferentes métodos de análise estrutural em regime elástico linear e de diferentes modelagens de pilares internos, com uma visão integrada de flexão e punção, para a obtenção das tensões no perímetro crítico  $c'$  e dos esforços usados na verificação da punção com momentos desbalanceados pela NBR 6118/2014 em lajes lisas de concreto armado.

## 1.2 Objetivos específicos

- a) Estudar os fatores que amplificam a parcela de esforços de momentos desbalanceados nas tensões solicitantes nas equações de verificação à punção segundo a NBR 6118 (2014).
- b) Estudar a variabilidade das tensões de cisalhamento médias e máximas observadas no perímetro crítico  $c'$  da NBR 6118 (2014) por método numérico em diferentes modelagens de pilar.
- c) Estudar a variabilidade dos esforços de reação do pilar e dos momentos desbalanceados por diferentes modelagens e métodos.
- d) Selecionar funções de distribuição de probabilidades que representem as incertezas de modelo causadas pelas variabilidades das tensões solicitantes no perímetro crítico  $c'$ , das forças de reação dos pilares e dos momentos desbalanceados nas lajes.
- e) Realizar estudos probabilísticos para analisar o impacto das variabilidades das tensões e dos esforços nos casos de estudo definidos.
- f) Definir quais modelos têm maior influência na probabilidade de falha para cada caso de estudo definido.
- g) Sugerir modelagens de pilar que melhor relacionem as tensões solicitantes obtidas no perímetro crítico a  $2d$  da face do pilar em uma análise numérica elástico linear com as tensões solicitantes fornecidas pela NBR 6118 (2014).

## 2 *Revisão de Literatura*

Neste capítulo é exposto um breve histórico de lajes lisas, bem como suas vantagens e desvantagens em relação ao sistema reticulado tradicional. São apresentados os fundamentos da verificação à punção da NBR 6118/14 e seus critérios normativos. Na sequência são apresentados os fundamentos de análises numéricas de lajes lisas por analogia de grelha e método dos elementos finitos. Discorre-se ainda sobre alguns métodos de pórticos equivalentes para análise de lajes lisas. Por fim, apontam-se alguns fundamentos para análise de variabilidade e estudo probabilístico usados neste trabalho.

### 2.1 Vantagens e desvantagens das lajes lisas

A opção pela adoção de lajes sem vigas (Figura 2.1) pode ser vantajosa por diversos fatores. No entanto, segundo Figueiredo Filho (1989), este tipo de estrutura possui características muito particulares que as diferenciam do sistema convencional de lajes, vigas e pilares, as quais são descritas abaixo.



**Figura 2.1 - Edifício com lajes lisas.**

Fonte: <http://www.promecon.com.br/wp-content/uploads/P6300005.jpg>

#### 2.1.1 Vantagens

- a) Simplificação e economia de formas em função da ausência das vigas;
- b) Rapidez na execução por conta de maior facilidade na montagem e desmontagem, cimbramento e reaproveitamento de material;

- c) Flexibilidade de modificações na arquitetura;
- d) Simplificação e racionalização das armaduras pela redução das operações de corte, dobra e montagem nas vigas;
- e) Simplificação da concretagem pela facilitação da vibração e redução da possibilidade de “bicheiras”;
- f) Redução da quantidade de cimento por não precisar de um concreto mais fluído em relação à solução com vigas;
- g) Redução da altura total do edifício;
- h) Simplificação das instalações por menor índice de cortes e emendas;
- i) Melhores condições de habitabilidade, pois a ausência de vigas facilita a insolação e ventilação dos ambientes.

### **2.1.2 Desvantagens**

- a) Maior deslocamento transversal das lajes em relação a uma laje de mesma rigidez com vigas;
- b) Estabilidade global do edifício deve ser solucionada com núcleos rígidos, pois a ausência de vigas não permite a formação de pórticos de contraventamento;
- c) Punção das lajes, fator crítico por conta da sua ruptura frágil.

## **2.2 Histórico de lajes lisas**

O sistema de lajes apoiadas diretamente em pilares apareceu pela primeira vez em 1906, com a construção do edifício C.A. Bovey Building em Minneapolis, nos Estados Unidos, pela iniciativa pioneira de C. A. P. Turner. Durante séculos as construções haviam sido executadas em pedra e madeira, onde os assoalhos recebiam as cargas que eram levadas às vigotas transversais, as quais transferiam as cargas às vigas mestras, e daí aos apoios, que podiam ser os pilares ou as próprias paredes. Com o surgimento do concreto armado, as estruturas executadas com o novo material adotaram a mesma filosofia construtiva que se vinha fazendo até então com pedra e madeira. Isto não aconteceu quando surgiram as lajes sem vigas, que tinham concepção totalmente diferente dos sistemas convencionais da época (FIGUEIREDO FILHO, 1989).

Houve muita polêmica em torno do novo sistema de lajes sem vigas na época, sendo que era construído de maneira empírica - uma vez que não havia métodos de análise disponíveis - e antes de serem utilizados eram realizados diversos testes de carga para sua aceitação (COELHO, 2000). A Figura 2.2 apresenta um exemplo de um teste de carga efetuado por C. A. P. Turner em 1909, em uma laje cogumelo com vãos de 5 metros, uma carga de 142 toneladas, onde se mediu a flecha em aproximadamente 1cm.

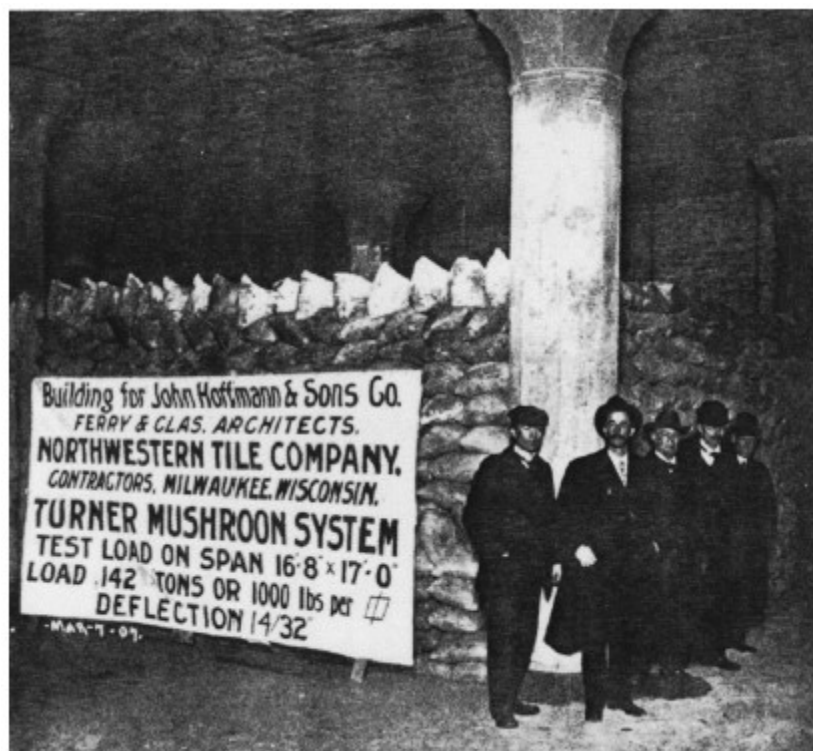


Figura 2.2 – Teste de carga efetuado por Turner no depósito Hoffman, Milwaukee (GASPARINI, 2002)

No entanto, mesmo com os resultados satisfatórios nos testes de carga e da aprovação por uma parte do meio técnico, surgiram também muitas críticas. Conforme afirma Hennrichs (2003), havia uma grande discrepância nos métodos de cálculo na época, onde era possível observar variações de até 400% na quantidade de armadura requerida para lajes e carregamentos semelhantes, abordado em um dos trabalhos publicados por McMillan e Brayton (1910).

A construção de edificações com lajes lisas na União Soviética teve início em 1908, quando o engenheiro A. F. Loleyt projetou, calculou e construiu um edifício de quatro pavimentos em Moscou. Nos demais países europeus, o primeiro exemplo que se tem registro data de 1910, um edifício de lajes sem vigas construído em Zurique, projetado por Maillart. Depois destes, até 1913 mais de mil edifícios com lajes sem vigas tinham sido erguidos em todo mundo (FIGUEIREDO FILHO, 1989). Foi também em 1913 que Talbot deu início ao estudo da punção, apresentando uma pesquisa sobre o problema da resistência à força cortante em 197 sapatas, ensaiadas até a ruptura. Destas, 20 romperam por punção, onde Talbot pode observar que a punção ocorreu segundo um tronco de cone com faces inclinadas em torno de 45°.

Segundo Coelho (2000), não havia métodos disponíveis para a análise, e consequentemente não havia consenso sobre a maneira mais segura e correta em se projetar as armaduras. Havia diferentes esquemas de armação, desde armaduras na diagonal, armaduras circulares ou retangulares em torno dos pilares, inclusive alguns semelhantes aos adotados atualmente, com armaduras paralelas às linhas de pilares (Figura 2.3).



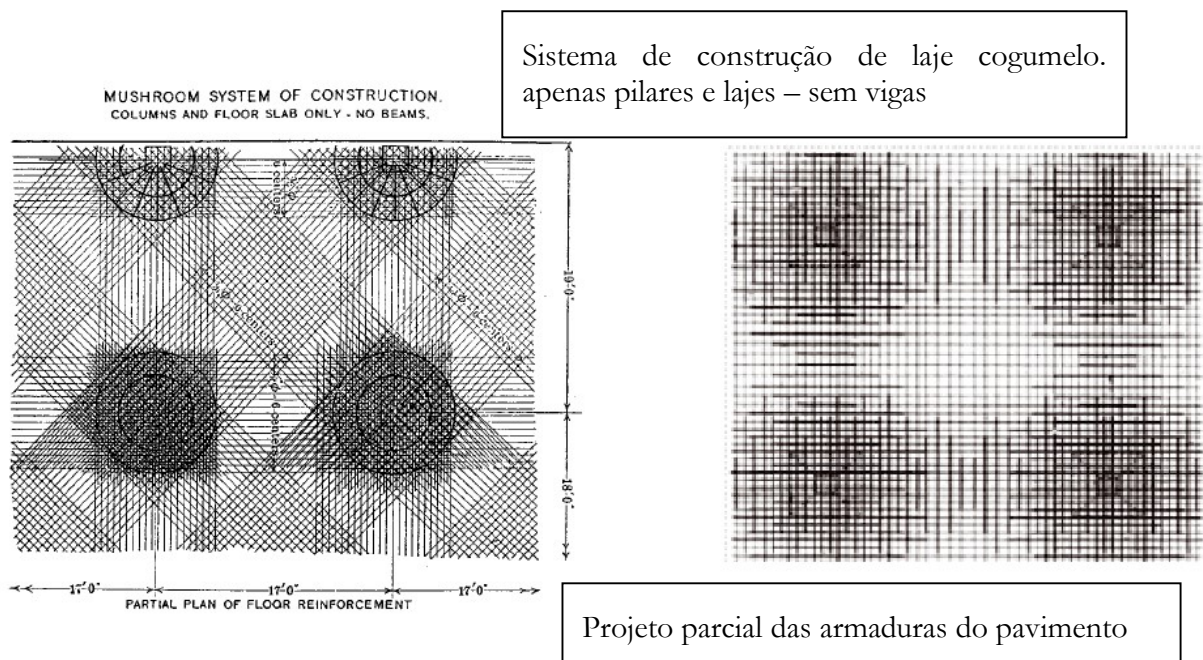


Figura 2.3 – Projeto de Turner (1905) e Maillart (1910) respectivamente. (SACRAMENTO et al, 2012)

Os estudos com lajes lisas tiveram início com Lord em 1910, quando este fez medidas de deformações em um piso de edifício sem vigas para melhor compreender seu comportamento. No entanto, os primeiros ensaios em laboratório que se tem registro foram realizados por Bach e Graf, entre 1911 e 1914.

O primeiro código que fez recomendações práticas sobre as lajes planas foi o ACI em 1920, ainda que o conhecimento do comportamento da estrutura e os métodos para sua análise não estivessem claros para os engenheiros (FIGUEIREDO FILHO, 1989). No ACI de 1971 foi apresentado o Método dos Pórticos Equivalentes para a análise elástica das lajes sem vigas, e abrangia o cálculo de todos os tipos de lajes armadas em duas direções, com ou sem vigas entre os apoios (HENNRICH, 2003). No Brasil, a NBR 6118 de 1978 recomendava o uso da Teoria das Charneiras Plásticas para o cálculo de lajes lisas. Era, ainda, permitido que se calculasse a laje pelo Método dos Pórticos Múltiplos quando os pilares estivessem em malha ortogonal e a espessura da laje obedecesse aos limites especificados pela norma.

O início do estudo analítico de placas se deu com J. Bernoulli, que estendeu um estudo de Euler, em 1766, sobre soluções para o problema de membranas elásticas a uma analogia para placas, introduzindo a analogia de grelha pela primeira vez (COELHO, 2000). Navier (1785-1836) foi o responsável por encontrar a solução correta das equações diferenciais de placas retangulares com resistência à flexão. O fundador da teoria estendida das placas é Kirchhoff (1824-1887), que introduziu o método dos deslocamentos virtuais na solução dos problemas de placas.

Em 1941, Hrennikoff desenvolveu um sistema equivalente à Analogia de Grelha, chamado de *Framework Method (Lattice Analogy)*, para análise elástica de problemas complexos de placas. Em 1956, os engenheiros da Boeing, Turner, Clough, Martin e Topp criaram o método dos elementos finitos, onde se tornou possível a solução numérica de problemas complexos de placas e cascas através do uso de computadores. Outro método desenvolvido para computadores foi o método das diferenças finitas, apresentado por Stüssi e Collatz e bastante utilizado para construção de tabelas.

A partir da década de 80 do século XX, começou a haver um grande desenvolvimento da eletrônica e se tornou possível desenvolver computadores de pequeno porte e com grande poder de cálculo. A produção em grande escala permitiu que o custo dos computadores diminuísse, permitindo a popularização e fácil acesso aos equipamentos, o que se tornou uma condição importante para o desenvolvimento tecnológico dos procedimentos de cálculo estrutural (CARVALHO, 1994).

Os procedimentos numéricos avançaram concomitantemente aos microcomputadores, e atualmente são desenvolvidos *softwares* de análise estrutural por empresas especializadas que permitem que diferentes análises, que no passado eram feitas de maneira simplista ou simplesmente não eram possíveis, possam ser realizadas.

## 2.3 Considerações referentes à punção

Neste item são apresentados os modelos de cálculo mais conhecidos para cálculo da punção, os fundamentos da verificação da punção pela NBR 6118/2014 e suas prescrições normativas.

### 2.3.1 Modelos de cálculo

O método mais conhecido e desenvolvido para verificar a resistência de uma ligação laje-pilar com relação à punção é o da superfície de controle, adotado pela NBR 6118/14. A sua vantagem em relação aos demais é a sua generalização, pois pode ser aplicada em qualquer configuração de pilar. No entanto é uma solução empírica e deve ser calibrada por ensaios experimentais. A seguir são apresentados o método da superfície de controle, o método de bielas e tirantes e o proposto por Kinnunen e Nylander (1960), que apesar de representar bem o comportamento mecânico da punção, é limitado a casos específicos.

#### a) Método da superfície de controle

O Método da Superfície de Controle consiste em se calcular uma tensão uniforme solicitante de punção em uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada. Compara-se o valor do esforço solicitante com uma resistência do concreto calculada para aquele perímetro e, se naquele perímetro o esforço resistente for maior que o solicitante, não é necessário o uso de armadura de punção.

A área desta superfície é dada pela multiplicação do perímetro pela altura da superfície de controle. Essa altura pode ser dada pela espessura da laje ( $h$ ), altura útil ( $d$ ) (Figura 2.4) ou braço de alavanca dos momentos internos ( $z$ ), dependendo de qual norma for adotada.



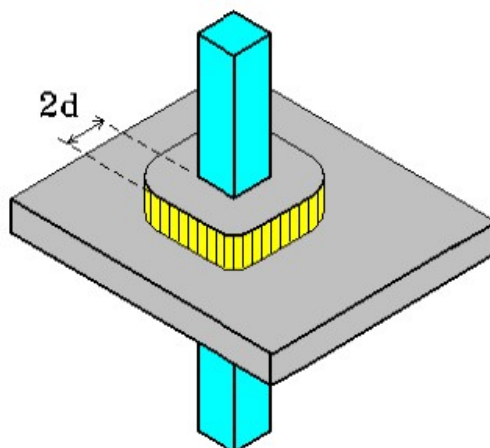


Figura 2.4 – Definição da superfície de controle da NBR 6118/03 (IBRACON, 2003)

A tensão solicitante é geralmente calculada em função da posição do pilar, da força concentrada e da presença ou não de momentos desbalanceados. Já a tensão resistente é geralmente calculada em função da resistência do concreto, da taxa de armadura de flexão e da presença ou não de armadura de punção.

A abordagem baseada na superfície de controle não significa o entendimento de que a ruptura ocorra nessa superfície (CORDOVIL, 1997). A superfície real de ruptura é mais parecida com a de um tronco de cone. Cordovil (1997) ainda diz que a superfície de controle deve ser considerada como uma grandeza de referência, ou um método que visa calibrar, de maneira prática, a segurança da estrutura. Por isso, a escolha dessa superfície de controle sempre deve estar ajustada com a definição do parâmetro de resistência do concreto. Pode-se concluir que o modelo adotado atualmente pelas normas para o cálculo da punção não representa o fenômeno físico da punção, mas uma adaptação de ordem prática para o entendimento e solução do problema.

O método da superfície de controle é a base de vários códigos e normas, tais como, por exemplo, a NBR 6118/78 e NBR 6118/2014, o CEB/FIB 90, o EUROCODE 2/92 e EUROCODE 2/04, a BS 8110/97 e o ACI 318-05, para citar alguns.

#### b) Método de bielas e tirantes

Os primeiros a usarem o modelo de bielas e tirantes para explicarem a punção sem efeitos de momentos foram Alexander e Simmonds, como menciona McGregor (1997).

Segundo Leonhardt & Mönning (1979), os ensaios demonstram que as deformações tangenciais são inicialmente maiores que as deformações radiais. Por isso, surgem primeiro as fissuras radiais. Somente para elevados estágios de carga aparecem algumas fissuras circulares, a partir das quais se desenvolvem as superfícies de ruptura por cisalhamento do cone de punção com inclinação média da ordem de 30°.

Antes da formação das fissuras inclinadas na região da laje próxima ao pilar, os esforços de punção são resistidos também pela tração no concreto. Uma vez que se formam estas fissuras, os esforços de punção não podem mais ser resistidos por tração. Após a formação das fissuras, os esforços são resistidos pelas bielas *A-B* e *D-C* (Figura 2.5), se estendendo da face inferior da laje no

pilar até a armadura de flexão negativa, nos pontos *A* e *D*. As bielas são consideradas nos quatro lados do pilar, no caso de pilares retangulares.

A componente horizontal dos esforços nas bielas causa mudanças nos esforços da armadura de flexão, nos tirantes *A* e *D*. A componente vertical “empurra” a armadura de flexão para cima, e é resistida pela tensão de tração no concreto entre as barras. Consequentemente, esse concreto rompe no plano das armaduras de flexão, o que resulta em falha por punção (MCGREGOR, 1997).

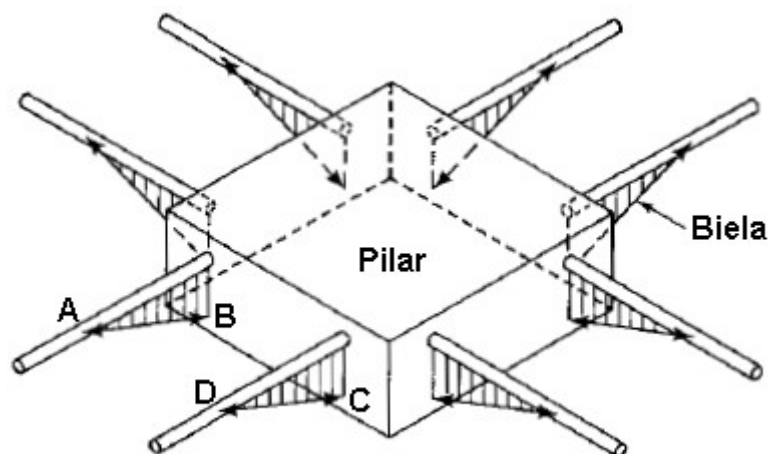


Figura 2.5 – Modelo de bielas e tirantes para a punção sem transferência de momentos

Quando cargas laterais ou cargas verticais desbalanceadas causam transferência de momentos entre a laje e o pilar, o comportamento da ligação se torna mais complexo, envolvendo flexão, tração e torção na região de ligação da laje com o pilar. Dependendo da amplitude destes três fatores, a falha pode se dar de diversas maneiras.

O modelo proposto por Alexander e Simmonds (1992) pode ser adaptado para o caso de pilares internos com transferência de momentos. A Figura 2.6 mostra um modelo de bielas e tirantes de um pilar interno sujeito a uma flexão pura.

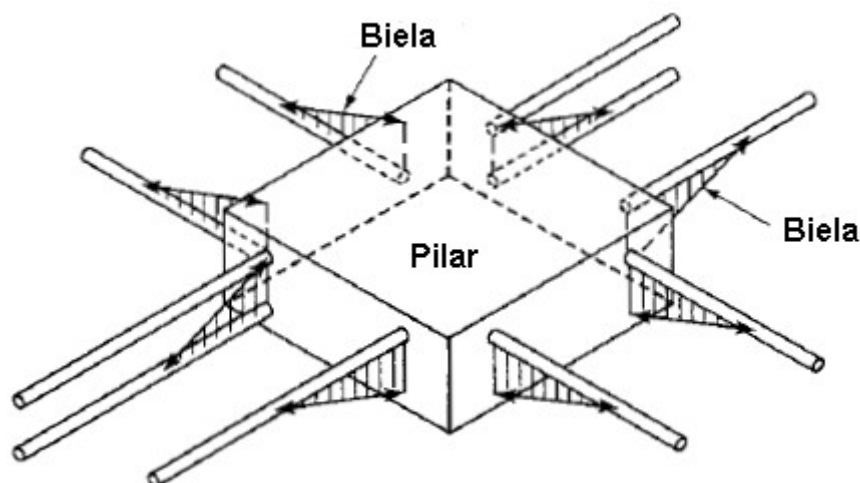


Figura 2.6 – Modelo de bielas e tirantes para a punção com transferência de momentos

### c) Modelos mecânicos

Os modelos mecânicos, também ditos “racionais”, são fundamentados pelos modelos constitutivos do concreto e do aço e se baseiam no comportamento da ligação, observado em ensaios. A resistência da ligação, nesse caso, é obtida pelo equilíbrio entre as ações aplicadas e os esforços internos.

Tem-se o modelo desenvolvido por Kinnunen e Nylander em 1960 que, embora complexo, apresenta a grande vantagem de se poder visualizar o comportamento real da ligação laje-pilar. Esse modelo apresenta uma hipótese para o equacionamento do problema de laje circular, solicitada por um pilar central também com seção circular. Trata-se do modelo em que a ruptura da laje ocorre a partir do pilar, com o deslocamento de um sólido interno (Figura 2.7). Esse sólido teria a forma aproximada de um tronco de cone, com a superfície inclinada entre  $25^\circ$  e  $30^\circ$  graus em relação ao plano da laje.

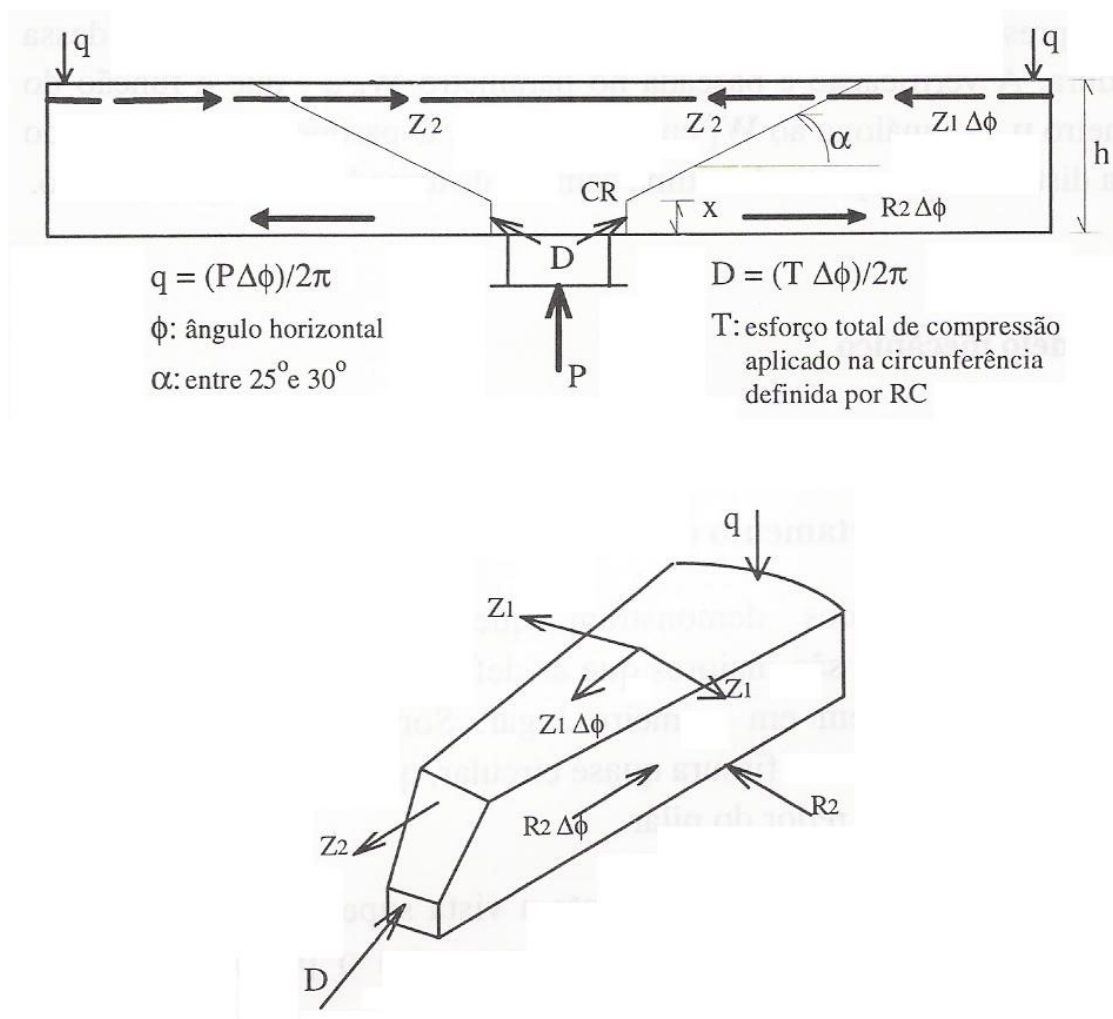


Figura 2.7 – Hipótese de ruptura e elemento rígido do modelo mecânico de Kinnunen e Nylander (CORDOVIL, 1997)

Na zona contígua ao tronco do cone, a laje seria dividida em elementos rígidos iguais, limitados pela superfície inclinada e por fissuras radiais. Cada elemento rígido produziria um trabalho decorrente da rotação em torno de um ponto chamado “centro de rotação” **CR**. Esse centro de rotação seria o limite entre dois estágios ideais de fissuração: as fissuras que limitam a superfície inclinada, bem como as fissuras radiais, seriam formadas antes da ruptura da laje, e a fissura localizada entre a periferia do pilar e o **CR** somente seria formada no instante da ruptura da laje.

A partir dessas hipóteses de funcionamento, é possível estabelecer as condições de equilíbrio entre os esforços externos e internos.

Nessas circunstâncias, há condições de se estabelecer uma teoria próxima da realidade, bastando para isso, aplicar o princípio dos trabalhos virtuais, supondo a rotação do elemento (Figura 2.8). Porém, quando se tenta estender essa teoria para formas quadradas ou retangulares, Cordovil (1997) afirma que não há como definir uma formulação confiável.

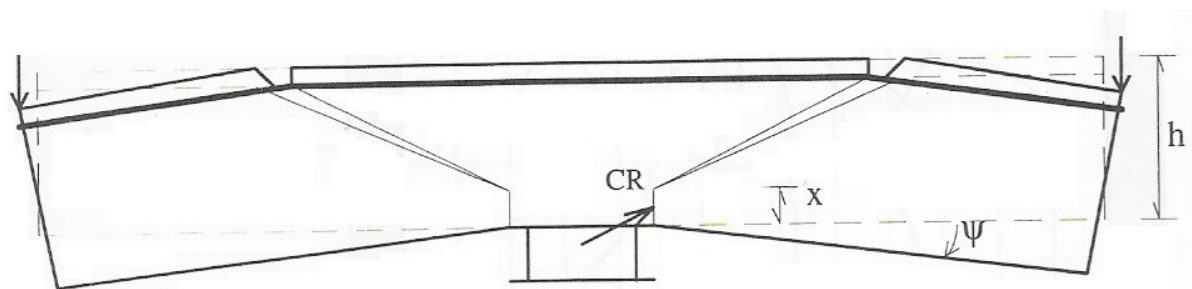


Figura 2.8 – Rotação do elemento rígido (CORDOVIL, 1997)

### 2.3.2 Considerações sobre a norma NBR 6118 /14

Com exceção do ACI (American Concrete Institute), que já trazia recomendações relativas à punção em lajes de concreto armado desde 1913, até antes da década de 70 as normas existentes continham poucas ou raras abordagens a respeito do problema.

A partir de 1972, o CEB (Comité Européen du Béton) incluiu o assunto entre as recomendações de projeto.

A NB1-60 (Norma Brasileira de 1960) ainda não abordava a questão. Somente em 1978, com o advento da NB1-78, incorporaram-se nas recomendações brasileiras procedimentos para o projeto de lajes submetidas a esforço de punção. A Norma de 78 fornecia resultados muito conservadores, normalmente de 2 a 3 vezes maiores que os resultados obtidos em ensaios (CORDOVIL, 1997). Com a revisão da NB1-78, a NBR 6118/03 apresentou um novo método de cálculo para o caso da punção que fornecia resultados muito mais próximos dos obtidos em ensaios, e por consequência também mais econômicos.

As seguir são apresentados os fundamentos dos critérios e as recomendações da norma brasileira NBR 6118 /14, que é a norma adotada nos estudos dos esforços e das tensões para cálculo da punção neste trabalho.

#### a) Fundamentos das especificações da NBR 6118 /2014

O modelo de cálculo à punção proposto pela norma brasileira é essencialmente empírico e é baseado no Código Modelo CEB-FIP/90, como afirmam Carvalho & Pinheiro (2009), além das contribuições para a versão atual da NBR 6118 de Gomes (1991), Stucchi & Knap (1993) e Melo (1994).

A contribuição de Gomes (1991) se refere à forma da superfície de ruína em pilares internos, dada a presença de armaduras de punção. Existem, portanto, três possibilidades de ruptura: a superfície de ruína atravessa a região armada; além da região armada; entre a face do pilar e a primeira linha da armação transversal.

Stucchi & Knap (1993) definiram o critério para pilares de borda e canto, onde os momentos são relativamente mais importantes. Tal critério permite uma redução da reação do pilar para a

verificação da punção, de valor igual ao da força distribuída na face oposta da laje, dentro do perímetro crítico, conforme Figura 2.9.

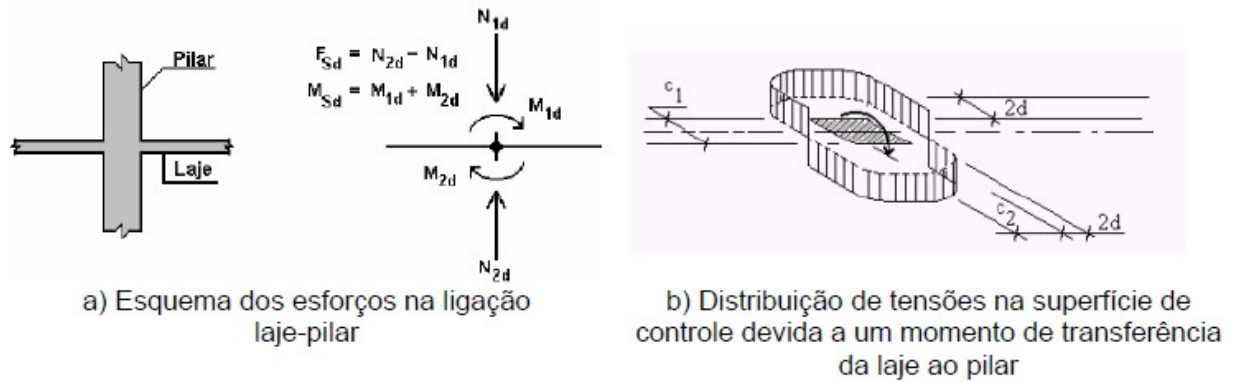


Figura 2.9 – Determinação de  $F_{sd}$  e  $M_{sd}$  (STUCCHI & KNAP, 1993 apud IBRACON, 2004)

Melo (1994) contribuiu com o sistema da NBR 6118/2014 para a solução do problema de colapso progressivo, comprovando experimentalmente a eficácia do sistema de utilização de barras na face inferior da laje, passando pelos pilares.

A fórmula atual da norma brasileira para a verificação da resistência à punção é baseada em ensaios em lajes com carregamento simétrico sem armadura de punção, feitos por diversos pesquisadores, entre eles Hallgren (1996), Kinnunen e Nylander (1960), Kinnunen, Nylander e Tolf (1980), Marzouk e Hussein (1991), Moe (1961), Ramdane (1996), Regan (1986) e Regan (1997) apud FIB (2001), que podem ser observados na Figura 2.10.

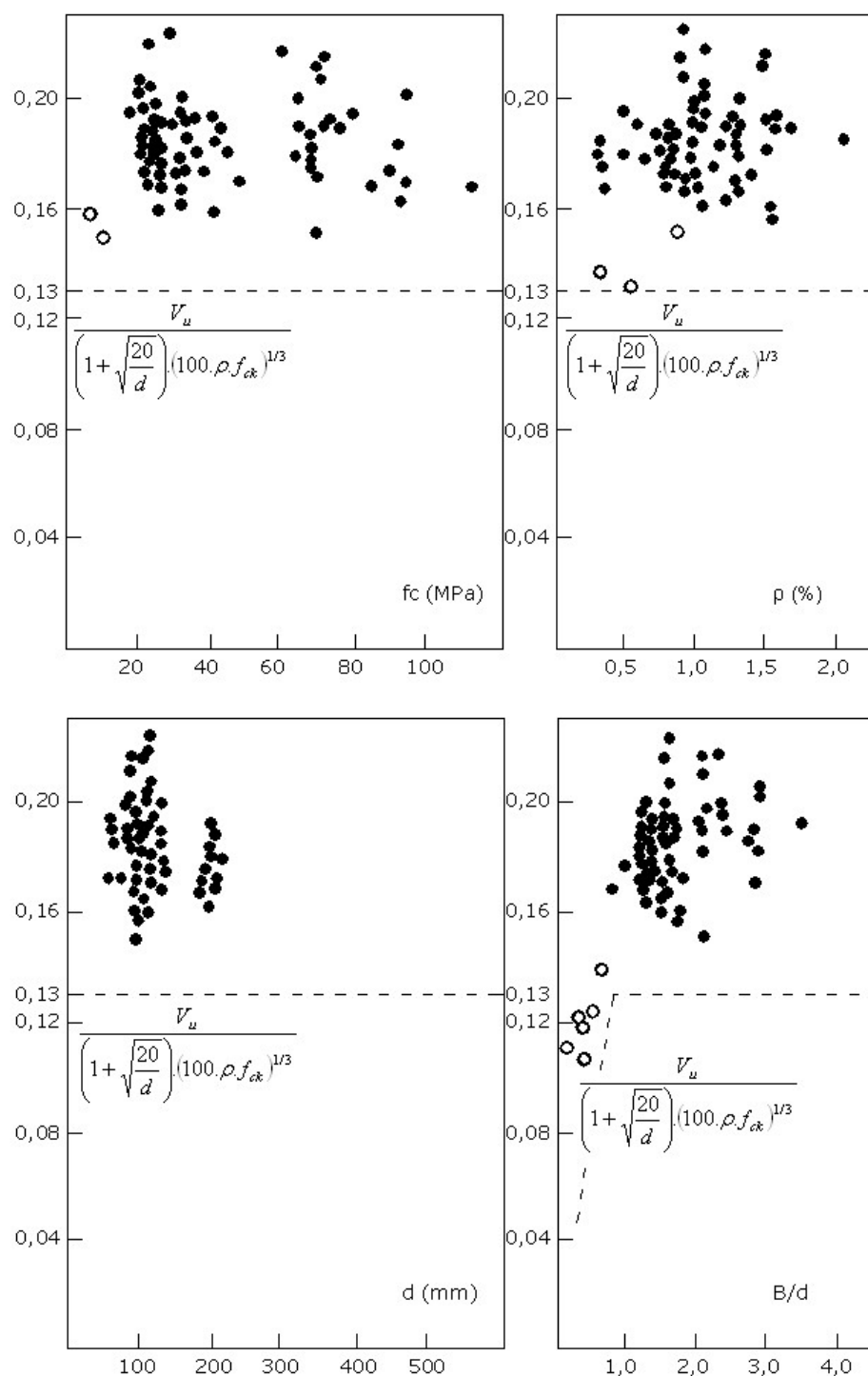


Figura 2.10 – Comparação dos resultados obtidos em ensaios com a NBR 6118 (FIB Bulletin 12, 2001)

Os símbolos apresentados na Figura 2.10 são idênticos aos da NBR 6118/14, com exceção de  $V_u$ , que é a tensão de ruptura das lajes ensaiadas e de  $B$ , que é o diâmetro equivalente de um pilar retangular.

Os círculos vazados na Figura 2.10 representam lajes com concreto de resistências muito baixas ou com baixa taxa de armadura de flexão.

A expressão para cálculo resistente de lajes sem armadura de punção pela NBR 6118/14 possui um fator de segurança de 1,23, uma vez que o valor máximo da expressão estaria mais próximo de  $0,16 \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}$ . Percebe-se que aplicando um coeficiente de segurança de 1,4 no  $f_{ck}$ , e tirando sua raiz cúbica, tem-se um valor igual a 1,12. A razão  $0,16/0,13$  é igual a 1,23 (maior que 1,12). Portanto mesmo não havendo um fator de segurança de 1,4 aplicado na expressão propriamente dita, há um fator maior que 1,4 aplicado no  $f_{ck}$ .

Os três primeiros gráficos da Figura 2.10 mostram como a expressão se mostra adequada quando se variam a resistência do concreto, a taxa de armadura de flexão ou a altura útil da laje. Já no último gráfico é possível perceber que a expressão não deve ser usada onde a área carregada é muito pequena, ou onde o diâmetro equivalente B é menor que  $0,75d$ , onde  $d$  é a altura útil da laje.

#### b) Especificações para cálculo da punção: NBR 6118 /14

O modelo de cálculo proposto pela NBR 6118/14 corresponde à verificação de dois ou mais perímetros de controle.

No primeiro perímetro, na face do pilar, denominado de contorno  $c$ , verifica-se a tensão de compressão diagonal do concreto, por meio de uma tensão de cisalhamento.

No segundo perímetro, localizado a uma distância  $2d$  da face do pilar, denominada de contorno  $c'$ , verifica-se a resistência da ligação à punção, associada à ruína por tração diagonal, por meio também de uma tensão de cisalhamento. Caso haja necessidade, essa ligação deve ser reforçada por uma armadura transversal.

O terceiro perímetro de controle, denominado de contorno  $c''$ , apenas deve ser verificado quando for necessário o uso de armadura transversal, e é verificado à distância de  $2d$  do último perímetro de armadura de punção.

O modelo de cálculo corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno de forças concentradas. A Figura 2.11 apresenta as formas possíveis de perímetros de controle  $c$  e  $c'$  para verificação da punção de pilares internos em lajes lisas.

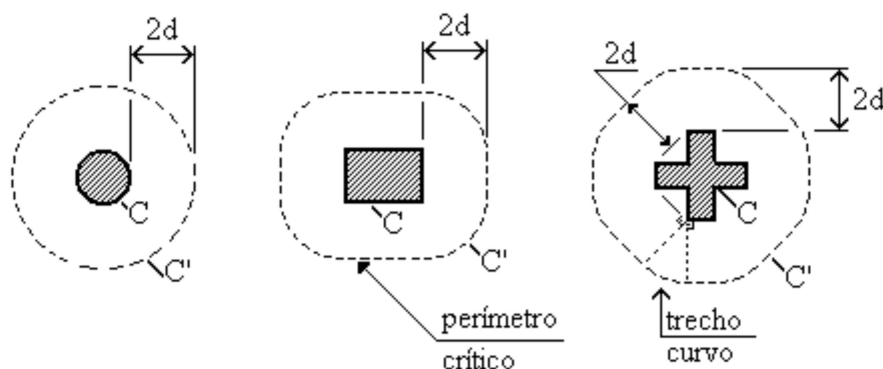


Figura 2.11 – Perímetro crítico em pilares internos (NBR 6118 /14)



A tensão solicitante em pilares com carregamento simétrico é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u.d} \quad [eq. 2.1]$$

Onde:

$F_{sd}$  é a força ou reação concentrada de cálculo;

$u$  é o valor numérico do perímetro de controle;

$d$  é a altura útil média da laje.

A tensão solicitante em pilares com efeito de momento é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u.d} + \frac{k.M_{sd}}{W_p.d} \quad [eq. 2.2]$$

Onde:

$M_{sd}$  é o momento de cálculo transmitido da laje ao pilar;

$k$  é o coeficiente que fornece a parcela de  $M_{sd}$  transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação  $c_1/c_2$ ;

$W_p$  é o módulo de resistência plástica do concreto do perímetro de controle.

O coeficiente  $k$  assume os valores indicados no Quadro 2.1.

**Quadro 2.1 – Valores de k**

C1/C2	0,5	1,0	2,0	3,0
k	0,45	0,60	0,70	0,80
Onde: C1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força; C2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.				

O módulo de resistência plástica pode ser avaliado pela seguinte expressão:

$$W_p = \int_0^u e \cdot dl \quad [eq. 2.3]$$

onde:

$dl$  é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico  $u$ ;

$e$  é a distância de  $dl$  ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento  $M_{sd}$ .

Quando existirem momentos em duas direções ortogonais, a expressão de  $\tau_{sd}$  é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + k_1 \cdot \frac{M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + k_2 \cdot \frac{M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d} \quad [eq. 2.4]$$

Nesse caso, devem-se fazer as adaptações necessárias para  $k_1$  e  $k_2$ , bem como para  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$ . A Figura 2.12 apresenta a relação dos lados dos pilares  $c_1$  e  $c_2$  com os momentos fletores.

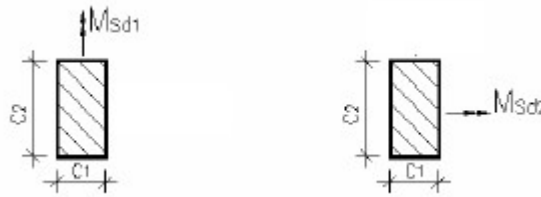


Figura 2.12 – Relação dos lados  $c_1$  e  $c_2$  dos pilares com os momentos fletores

A tensão resistente de compressão diagonal do concreto no contorno C é dada por:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \quad [eq. 2.5]$$

Onde:

$f_{cd}$  é a resistência de cálculo do concreto à compressão cilíndrica (MPa);

$\alpha_v$  é o fator de correção da resistência do concreto, dado por:

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad [eq. 2.6]$$

com  $f_{ck}$  em MPa.

A tensão resistente em elementos estruturais sem armadura de punção no contorno c' é dada por:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \quad [eq. 2.7]$$

onde:

$\rho^2 = \rho_x \cdot \rho_y$  é a taxa de armadura nas duas direções ortogonais, calculadas com a largura igual à dimensão do pilar, ou área carregada, mais “3d” para cada um dos lados (ou até a borda da laje, se esta estiver mais próxima);

$d$  é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico c' em mm.

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto, em MPa;

A tensão resistente em elementos estruturais com armadura de punção no contorno C' é dada por:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + \left(1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \frac{1}{u \cdot d}\right) \quad [eq. 2.8]$$

onde:

$s_r$  é o espaçamento radial entre a armadura de punção, não deve ser maior que  $0,75d$ , com  $d$  em cm;

$A_{sw}$  é a área da armadura de punção por camada;

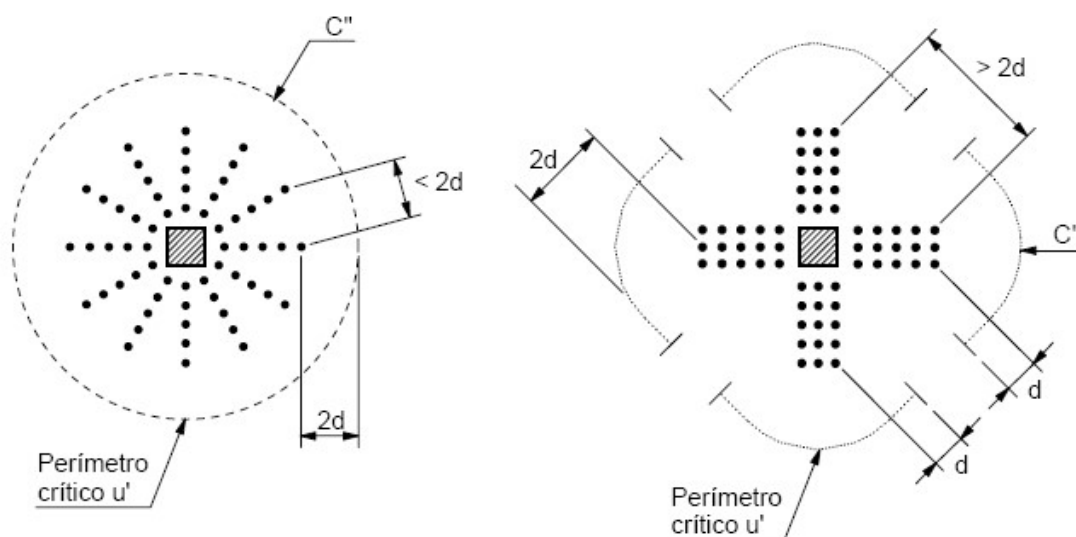
$f_{ywd}$  é a resistência de cálculo da armadura de punção. Deve ser menor que 300 MPa para conectores do tipo pino e 250 MPa para estribos (CA-50 ou CA- 60); Em lajes com altura superior a 35 cm a resistência dos estribos pode ser considerada no máximo igual a 435 MPa.

$\alpha_s$  é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;

$u$  é o valor numérico do perímetro de controle  $c'$ , distante  $2d$  da face do pilar.

$f_{ck}$  é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto, em MPa;

Para o cálculo da tensão resistente externa à região com armadura de cisalhamento, deve-se adotar o perímetro crítico distante “ $2d$ ” do último elemento da armadura de cisalhamento, como mostra a Figura 2.13. Devem ser usadas no mínimo três linhas de conectores, estribos ou pinos, com suas extremidades ancoradas fora do plano da armadura de flexão.



**Figura 2.13 – Disposição da armadura de punção e perímetro da superfície crítica  $C''$  (NBR 6118 /14)**

As regiões mínimas em que devem ser dispostas as armaduras de punção, bem como as distâncias regulamentares a serem obedecidas são apresentadas na Figura 2.14.

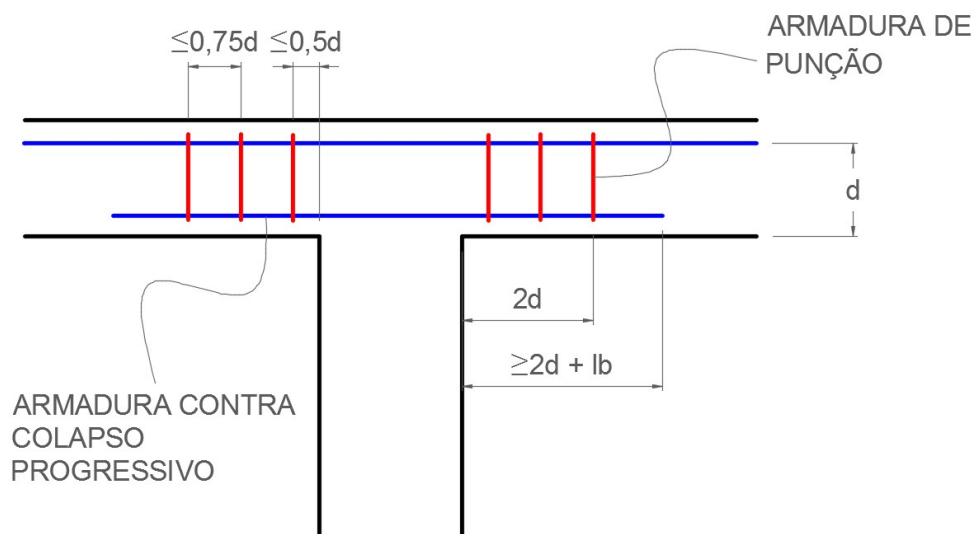


Figura 2.14 – Disposição da armadura de punção e da armadura de colapso progressivo

## 2.4 Análise estrutural de lajes

Neste item são apresentadas inicialmente as teorias básicas dos métodos numéricos utilizados neste trabalho, admitindo-se comportamento elástico linear no concreto armado. Posteriormente é apresentado também o método dos pórticos equivalentes.

### 2.4.1 Teoria das placas delgadas

Pode-se considerar uma placa como fina quando sua espessura é inferior a 10% do maior vão, e espessa caso contrário. É possível fazer análise de placas finas através da Teoria das Placas Delgadas, que parte de algumas hipóteses simplificadoras, conhecidas como hipóteses de Kirchhoff-Love (TIMOSHENKO & KRIEGER, 1959):

- i. o material da placa é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de Hooke;
- ii. a placa indeformada é plana;
- iii. a espessura é pequena em relação às dimensões da placa, da ordem de 10%;
- iv. Os deslocamentos dos pontos da superfície média são pequenos se comparados com a espessura da placa, inferiores a 10%;
- v. as tensões normais à superfície média são desprezáveis em relação às demais tensões no mesmo plano;
- vi. As cargas são aplicadas perpendicularmente à superfície da placa;
- vii. As deformações devido ao cisalhamento são desprezadas;
- viii. A deformação da placa é produzida por deslocamentos dos pontos da superfície média perpendicular ao plano indeformado.

- **Equação de Lagrange**

A relação fundamental da teoria das placas delgadas é a equação de Lagrange, válida para materiais em regime elástico linear. Pode-se deduzir a equação de Lagrange tomando-se um elemento infinitesimal de placa, submetido à uma carga transversal  $q$ . Têm-se com esforços internos os momentos fletores em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , momentos torçores  $m_{xy}$  e  $m_{yx}$  e os esforços cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  (TIMOSHENKO & KRIEGER, 1959), conforme Figuras 2.15 e 2.16.

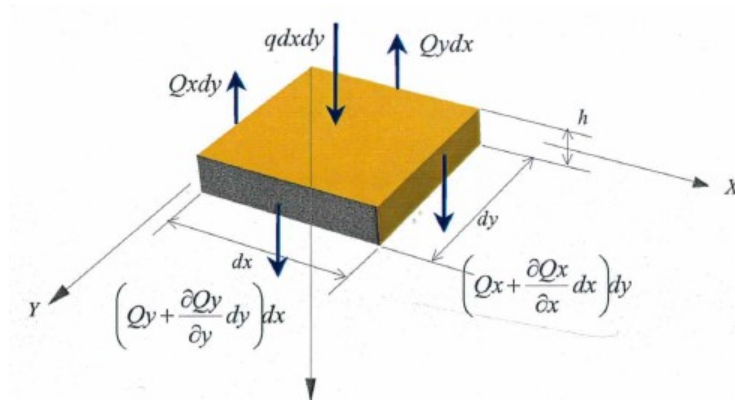


Figura 2.15 – Equilíbrio de um elemento de placa para forças cortantes (COELHO, 2000)

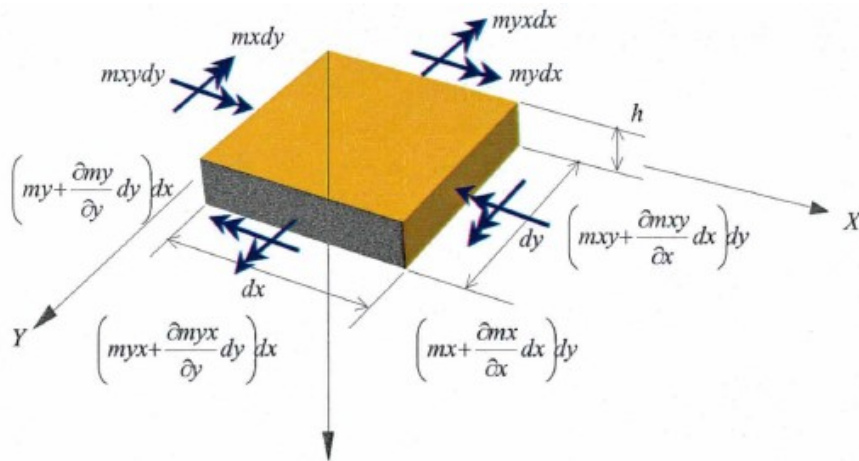


Figura 2.16 – Equilíbrio de um elemento de placa para momentos fletores e torçores (COELHO, 2000)

Tomando-se  $Q$  como sendo a carga resultante de  $q$  na área  $dx$  e  $dy$ , tem-se:

$$Q = q \cdot dx \cdot dy \quad [eq. 2.9]$$

Fazendo o somatório das forças no eixo  $z$  igual a zero, tem-se:

$$q(x, y). dx. dy - Q_x. dy + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y. dx + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0 \quad [eq. 2.10]$$

que chega a:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad [eq. 2.11]$$

Fazendo o equilíbrio dos momentos em torno do eixo x, tem-se:

$$m_y dx - \left( m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx - m_{xy} dy + \left( m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy - Q_x dy \frac{dy}{2} + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + q dx dy \frac{dy}{2} = 0 \quad [eq. 2.12]$$

Simplificando e desprezando termos de ordem superior, tem-se:

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = Q_y \quad [eq. 2.13]$$

Fazendo o equilíbrio dos momentos em torno do eixo y, tem-se:

$$m_x dy - \left( m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_{yx} dx + \left( m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dx dy - Q_y dx \frac{dx}{2} + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + q dy dx \frac{dx}{2} = 0 \quad [eq. 2.14]$$

Simplificando e desprezando termos de ordem superior, tem-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad [eq. 2.15]$$

Substituindo então [eq. 2.15] e [eq. 2.13] em [eq. 2.11], tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) = -q \quad [eq. 2.16]$$

Como  $m_{xy}$  é igual a  $m_{yx}$ , chega-se a equação diferencial de equilíbrio das placas:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad [eq. 2.17]$$

Uma vez que a [eq. 2.17] não depende de nenhuma propriedade do material, pode ser adotada para análises de qualquer regime de comportamento do material.

Para se obter a equação de Lagrange, deve-se considerar a equação da linha elástica, conforme Figura 2.17. Seja uma placa de espessura  $h$  submetida a um momento fletor  $mx$ , que provoca uma curvatura  $1/\rho'$ .

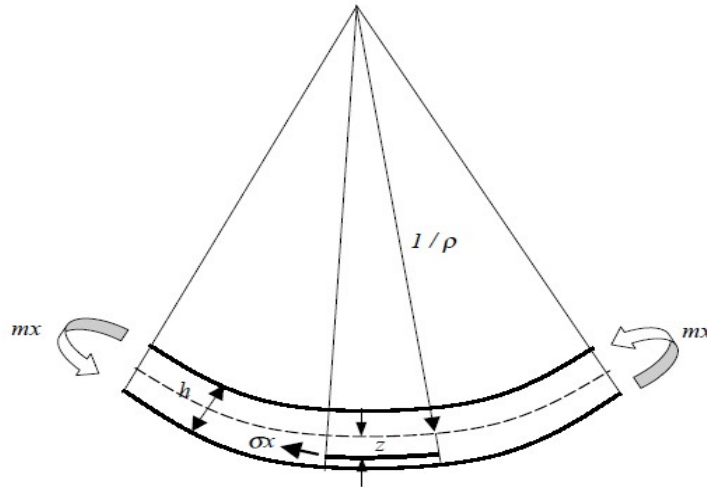


Figura 2.17 – Curvatura de um elemento de placa submetido a um momento  $mx$  (HENNRICHS, 2003)

Pode-se escrever a relação deformação-curvatura como:

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon_x}{z} \quad [eq. 2.18]$$

onde:



$w$  é o deslocamento na placa na direção  $z$  ;

$\rho$  ' é o raio de curvatura;

$\varepsilon_x$  é a deformação específica;

$z$  é a distância da fibra à superfície média da placa.

Tem-se então, para os dois eixos da placa:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad [eq. 2.19]$$

e

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad [eq. 2.20]$$

Considerando material elástico-linear, fica válida a lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad [eq. 2.21]$$

e, ampliando para duas dimensões, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad [eq. 2.22]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad [eq. 2.23]$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \frac{E}{2(1-\nu)} \quad [eq. 2.24]$$

O momento  $m_x$  por unidade de comprimento é dado por:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad [eq. 2.25]$$

Portanto, substituindo [eq. 2.19] em [eq. 2.22], depois substituindo em [eq. 2.25] e

procedendo a integração, chega-se a:

$$m_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad [eq. 2.26]$$

Analogamente para a direção y:

$$m_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad [eq. 2.27]$$

onde pode-se definir  $D$  como a rigidez da placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad [eq. 2.28]$$

Similarmente, o momento de torção pode ser obtido:

$$m_{xy} = -D.(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad [eq. 2.29]$$

Substituindo [eq. 2.26], [eq. 2.27] e [eq. 2.29] em [eq. 2.17], tem-se a equação de Lagrange, dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad [eq. 2.30]$$

A equação de Lagrange define a relação fundamental da teoria das placas delgadas para materiais em regime elástico-linear.

A solução exata desta equação só existe para casos específicos, e pode ser obtida por séries simples de Fourier e séries duplas trigonométricas de Navier. Para soluções mais gerais deve-se fazer uso de métodos numéricos, que são soluções aproximadas. Entre estes podem-se citar o método das diferenças finitas, método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos.

### 2.4.2 Fundamentos do método dos deslocamentos

Em 1959, Lightfoot e Sawko constataram que a análise de grelhas e pórticos planos pelo método dos deslocamentos era bastante parecida e adaptaram um programa de cálculo de pórtico plano para o cálculo de grelhas (STRAMANDINOLI e LORRIGIO, 2003).

Zienkiewicz e Taylor (1988) afirmam que a formulação usada no Método dos Elementos Finitos pode ser baseada no método dos deslocamentos, em modelos de equilíbrio, ou em métodos híbridos e mistos, sendo o primeiro (o método dos deslocamentos) o que apresenta uma maior simplicidade e, conseqüentemente, uma maior versatilidade.

Sucintamente, pode-se descrever o método dos deslocamentos através dos passos mostrados a seguir (SIMÕES, 2002):

- i. determina-se o grau de indeterminação cinemática e escolhe-se um sistema de coordenadas de modo a poder-se identificar a posição e a direcção dos deslocamentos dos nós. Em seguida são introduzidas forças de restrição (em número igual ao grau de indeterminação cinemática) que impedem os deslocamentos dos nós (as forças são do mesmo tipo, sentido e direcção dos deslocamentos restringidos);
- ii. determinam-se as forças de restrição somando as forças de fixação dos extremos das barras convergentes nos nós (um a um), que devem impedir os deslocamentos para qualquer tipo de ação externa. Estas ações podem ser consideradas separadamente ou em conjunto. Determina-se ainda nesta fase os esforços internos nas barras correspondentes às forças de restrição.
- iii. A estrutura considerada deformada de tal modo que em um nó o deslocamento seja unitário e nulo em todos os demais. As forças necessárias para manter a estrutura nesta configuração são então calculadas, repetindo-se o procedimento para cada um dos nós restantes.
- iv. Os deslocamentos necessários para eliminar as forças de restrição (obtidas em ii) são determinados aplicando a sobreposição dos efeitos para os diversos deslocamentos impostos e igualando às forças de restrição.
- v. Os esforços na estrutura original são obtidos adicionando os esforços originados pelos deslocamentos determinados em iv aos esforços na estrutura restringida.

Sendo a equação básica do modelo:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad [eq. 2.31]$$

onde:

$F$  é o vetor das cargas externas;

$\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura;

$\delta$  é o vetor de deslocamentos.

Adicionando os esforços originais, sendo  $F_0$  o vetor de engastamento perfeito:

$$\{F\} - \{F_0\} = [K]\{\delta\} \quad [eq. 2.32]$$

Resolvendo [eq. 2.32] em função dos deslocamentos, obtém-se:

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \cdot (\{F\} - \{F_0\}) \quad [eq. 2.33]$$

A determinação dos vetores para as ações de extremidade de membro e reações na estrutura real são obtidos das equações de superposição no sistema de coordenadas local:

$$\{S\} - \{S_0\} = [r]\{d\} \quad [eq. 2.34]$$

onde:

$S$  são os esforços nas extremidades da barra;

$S_0$  são os esforços de mobilização dos nós na extremidade das barras;

$r$  é a matriz de rigidez do elemento da barra;

$d$  é o vetor de deslocamentos correspondente aos nós de extremidade da barra.

A análise é completada quando se obtêm os valores dos deslocamentos, reações de apoio e esforços nas barras.

### 2.4.3 Analogia de grelha

A analogia de grelha é um método que apresenta bons resultados para uma grande variedade de lajes, além de ser de fácil compreensão e utilização, o que levou a ser bastante usado para análise de lajes em concreto armado, a exemplo dos *softwares* comerciais mais difundidos no Brasil, como o CAD/TQS e o Eberick. A Figura 2.18 apresenta o procedimento de analogia de grelha, que consiste em substituir a laje por uma grelha equivalente de vigas.

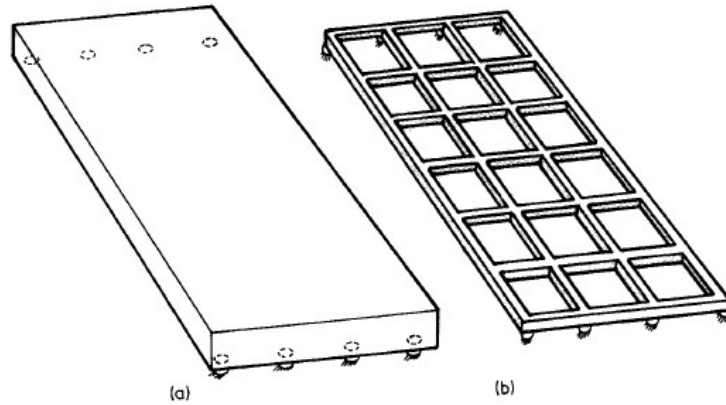


Figura 2.18 – (a) Laje protótipo; (b) Grelha equivalente (HAMBLY, 1976)

Para efeito de análise, as rigidezes à torção e flexão em cada região da laje são tomadas como concentradas na barra de grelha mais próxima. Assim, a rigidez longitudinal é concentrada nas barras longitudinais e a rigidez transversal é concentrada nas barras transversais. As rigidezes devem garantir que, quando sujeitas ao mesmo carregamento, a laje e a grelha equivalente apresentem a mesma deformação, momentos fletores e torçores e esforços cortantes em seções correspondentes. Entretanto, segundo Hambly (1976), isto se dá somente de forma aproximada, devido às diferentes características desses dois tipos de estrutura.

Conforme observou Carvalho (1994), o coeficiente de Poisson  $\nu$  atua de maneiras diferentes quando se analisa uma laje pela teoria das placas e o processo de analogia de grelha. Observe que a rigidez de uma viga de seção retangular dada pela [eq. 2.35], é menor que a de uma placa [eq. 2.36] também com largura de faixa  $b_f$  e com a mesma altura da viga.

$$D_v = E \frac{b_f h^3}{12} \quad [eq. 2.35]$$

$$D_p = E \frac{b_f h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad [eq. 2.36]$$

Entretanto, depois de comparar os resultados das lajes maciças, obtidos através do processo de analogia de grelha, com os resultados fornecidos através do cálculo como placa pela teoria da elasticidade, pode-se dizer que os resultados obtidos com essa analogia são satisfatórios (COELHO e LORIGGIO, 2000; STRAMANDINOLI e LORIGGIO, 2003).

Pela facilidade de programação, a matriz de rigidez do sistema geralmente é obtida usando o método dos deslocamentos, aplicando-se um deslocamento unitário em cada nó da barra na direção dos graus de liberdade, impedindo-se os deslocamentos nas demais direções. No caso da grelha, cada nó possui três graus de liberdade, conforme Figura 2.19.

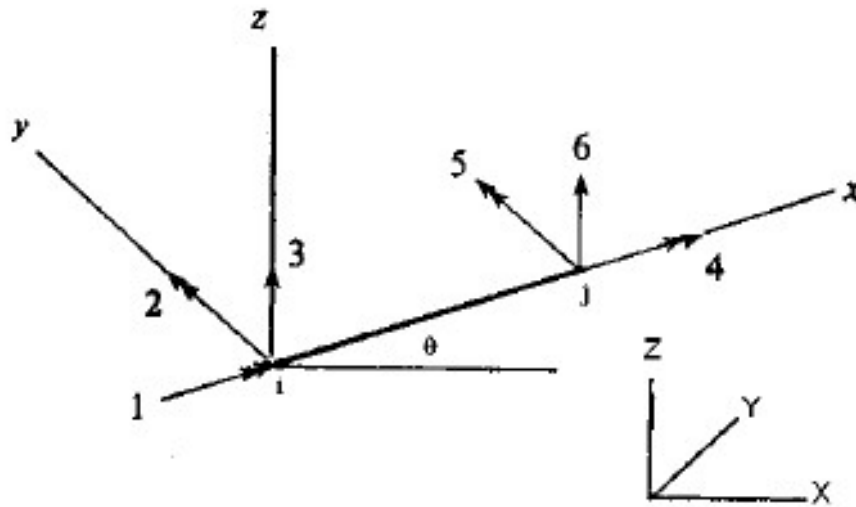


Figura 2.19 – Graus de liberdade de uma barra de grelha (COELHO, 2000)

As forças produzidas por esses deslocamentos são os coeficientes de rigidez das barras, conforme mostram as figuras abaixo.

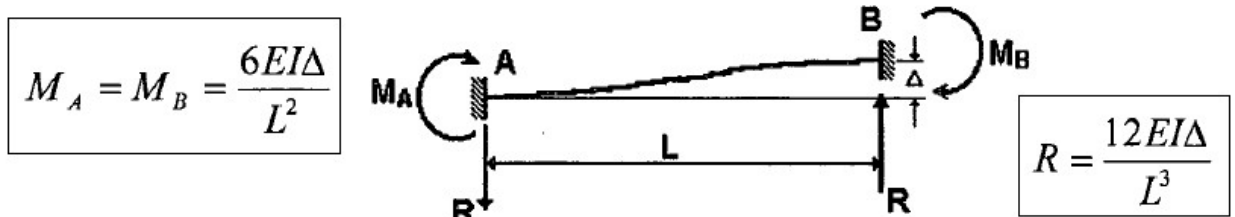


Figura 2.20 – Momentos fletores e reações na barra devidos a um deslocamento (COELHO, 2000)

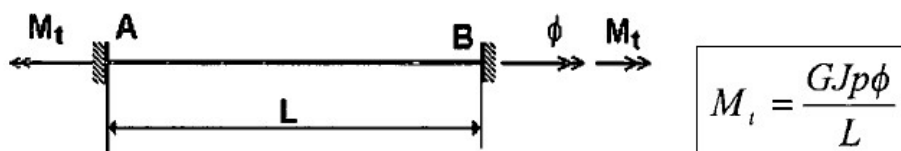


Figura 2.21 – Momentos de torção na barra devido a rotação em uma das extremidades (COELHO, 2000)

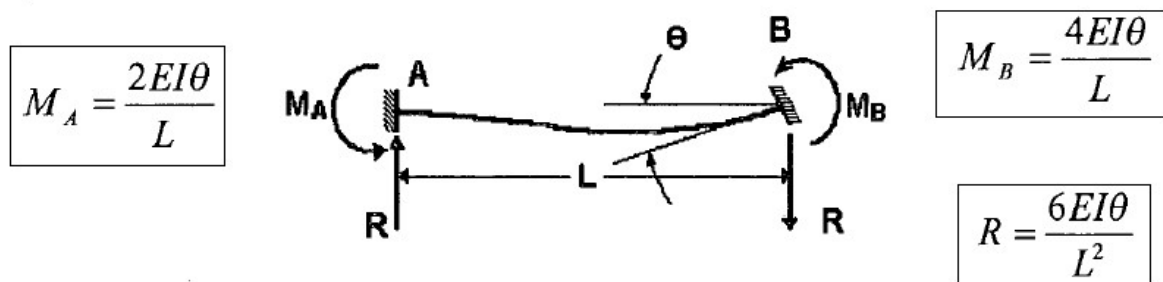


Figura 2.22 – Momentos fletores e reação na barra devidos a uma rotação em uma das extremidades (COELHO, 2000)

Após montar as equações de equilíbrio de forças em torno dos nós, tendo-se como

incógnitas os deslocamentos e compõe-se a matriz de rigidez de cada barra, pode-se cancelar algumas linhas e colunas da matriz, uma vez que desprezam-se os deslocamentos axiais das barras.

A solução da laje pelo processo de analogia de grelha consiste basicamente em definir a matriz de rigidez da grelha em função das propriedades das barras, aplicar as cargas nos nós e então obter os deslocamentos da grelha, de onde se tiram os esforços nas barras da grelha.

Alguns inconvenientes que se podem apresentar sobre o processo de analogia de grelha, conforme Stramandinoli e Loriggio (2003), são que, inicialmente, o equilíbrio de qualquer elemento de uma laje exige que os momentos torçores sejam idênticos nas duas direções ortogonais ( $M_{xy} = M_{yx}$ ), assim como as distorções angulares  $2\partial^2 w / \partial x \partial y$ . No caso da grelha equivalente não existe nenhum princípio físico ou matemático que garanta que os momentos torçores e as distorções angulares em um determinado ponto sejam iguais nas direções ortogonais. Esse problema pode ser contornado se a malha da grelha for muito refinada. Neste caso, a grelha vai se deformar como uma superfície lisa com os momentos torçores e distorções aproximadamente iguais nas direções ortogonais. Outro problema da analogia de grelha é que o momento em uma barra depende apenas de sua curvatura, enquanto que em uma laje, o momento em qualquer direção depende da curvatura naquela direção e na direção ortogonal.

Outra questão que influencia os resultados, é o parâmetro de rigidez à torção. Os esforços de torção que ocorrem pela substituição das faixas de lajes em barras são representados por momentos de torção nas barras, conforme Figura 2.19. Portanto, para que se mantenha o equilíbrio na grelha, ocorre uma influência nos valores dos momentos fletores obtidos em função dos momentos de torção. O momento de inércia à torção  $J$  para uma barra retangular pode ser calculado pela seguinte equação (GERE & WEAVER, 1981):

$$J = \beta_T \cdot b_w \cdot h_f^3 \quad [eq. 2.37]$$

onde:

$b_w$  é a maior dimensão da seção transversal

$h_f$  é a menor dimensão da seção transversal

O parâmetro  $\beta_T$  é dado por:

$$\beta_T = \frac{1}{3} - \left( 0,21 \cdot \frac{h_f}{b} \right) \left( 1 - \frac{h_f^4}{12 \cdot b_w^4} \right) \quad [eq. 2.38]$$

Conforme a [eq. 2.37], pode-se perceber que a rigidez à torção é proporcional ao cubo da menor dimensão das faixas ( $h$ ). Portanto a rigidez à torção da placa diminui significativamente para malhas pouco espaçadas, não sendo possível utilizar a equação nesses casos (COELHO e

LORIGGIO 2000). Uma opção bastante adotada é estimar a rigidez à torção como uma proporção linear da rigidez à flexão. Stramandinoli e Loriggio (2003) chegaram a diferentes valores para a relação  $J/I$ , dependendo da análise que se efetua. Em alguns casos, a relação  $J/I$  que mais aproximou os valores dos momentos fletores com os obtidos pela teoria da elasticidade foi entre 1,8 e 1,75, já para flechas, o valor para a relação foi em torno de 2,8. Coelho (2000) concluiu que uma relação  $J/I$  entre 2 e 2,5 apresenta resultados para os esforços e deslocamentos que diferem muito pouco dos obtidos pela teoria da elasticidade. A relação teórica que aproxima a relação é a sugerida por Montoya (1973) apud Coelho (2000) e Hambly (1976), em que propuseram o valor da inércia à torção igual a duas vezes sua inércia à flexão ( $J = 2I$ ), relação adotada neste trabalho.

#### 2.4.4 Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos é uma análise matemática que consiste na discretização de um meio contínuo em um número finito de elementos, mantendo as mesmas propriedades do meio original. Portanto, é um método numérico aproximado generalizado que permite analisar uma estrutura onde não é possível obter soluções satisfatórias por métodos analíticos. Utilizam-se, para tanto, elementos que são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos. Soluções que compartilhavam da mesma filosofia deste método têm origem no final do século XVIII (LOTTI et al, 2006), contudo sua viabilização só se tornou possível com o advento dos computadores, facilitando a resolução das enormes equações algébricas.

Segundo La Rovere (2001), o método dos elementos finitos pode ser definido sob diferentes enfoques:

- i. enfoque matemático, em que pode ser interpretado como um método aproximado para solução de equações diferenciais parciais ou problemas de valor de contorno;
- ii. enfoque físico, onde pode ser caracterizado como um método de discretização;
- iii. enfoque variacional, sendo uma modificação do método de Rayleigh-Ritz, em que o domínio de integração do funcional é subdividido em regiões.

A aplicação do método dos elementos finitos aos problemas de estruturas necessita a discretização em  $n$  elementos com um total de  $N$  nós. Transforma-se então o sistema de equações diferenciais que rege o problema em um sistema de equações algébricas, no qual as incógnitas são os deslocamentos nodais.

Matricialmente, este sistema de equações pode ser escrito na forma:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad [eq. 2.39]$$

onde:

$[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura

$\{U\}$  é o vetor de deslocamentos nodais



$\{F\}$  é o vetor de forças nodais

Resolvendo o sistema são obtidos os deslocamentos nodais  $\{U\}$ , onde então é possível chegar aos valores dos deslocamentos  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  em qualquer ponto dentro de cada elemento, através de funções de interpolação. A partir dos deslocamentos chega-se às deformações específicas e às tensões em qualquer ponto dentro do elemento.

Por ser um método numérico, a solução obtida será aproximada. O grau de aproximação, bem como as condições de convergência, dependem fundamentalmente da formulação dos elementos, da escolha da malha e do tipo de elemento utilizado na discretização do problema.

#### a) Elemento finito de placa

As placas finas permitem uma modelagem por modelos bidimensionais e a principal diferença entre a teoria para placas finas proposta por Kirchhoff e placas espessas, é que consideram-se pequenas deformações, além de serem desprezadas as deformações pelo cisalhamento.

No programa SAP2000 são usados elementos quadriláteros formulados por Batoz e Tahar (1982), chamados *Discrete Kirchhoff Quadrilateral* (DKQ). O elemento quadrilátero DKQ possui 12 graus de liberdade e é muito eficiente para a representação da flexão em elementos de placas ou cascas (KANSARA, 2004). A Figura 2.23 apresenta o elemento com três graus de liberdade para cada nó, o deslocamento vertical  $w$  e as rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$ .

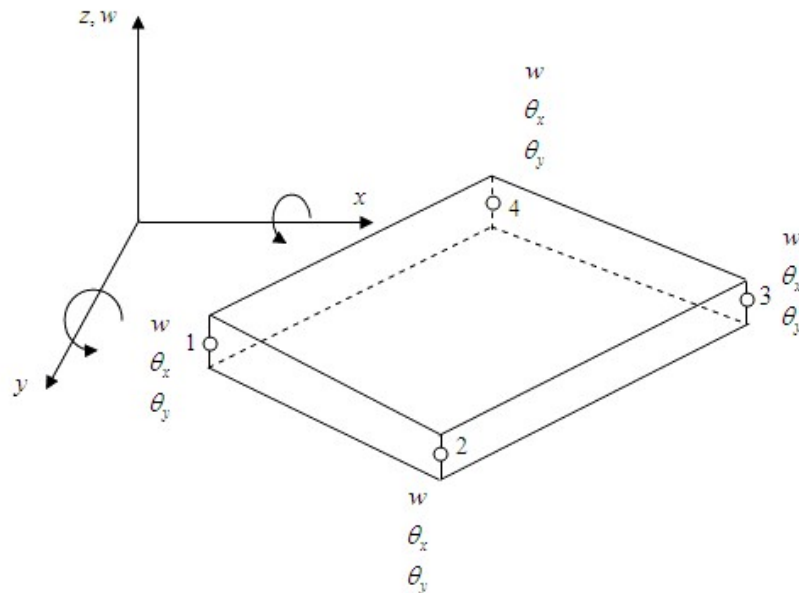


Figura 2.23 – Elemento quadrilátero de Batoz e Taharm (KANSARA, 2004)

A formulação do elemento DKQ é baseada na teoria da placa de Kirchhoff, onde se desprezam as deformações por cisalhamento. A energia de deformação do elemento é dada por:

$$U = \sum_e U_e^b \quad [eq. 2.40]$$

onde  $U_e^b$  é a energia de deformação por flexão do elemento, dada por:

$$U_e^b = \frac{1}{2} \int_{A^e} [\chi]^T [D_b] [\chi] dA^e \quad [eq. 2.41]$$

O vetor de curvaturas  $[\chi]$  é dado por:

$$[\chi] = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad [eq. 2.42]$$

E a matriz constitutiva generalizada de flexão  $[D_b]$  é dada por:

$$[D_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad [eq. 2.43]$$

onde:

$E$  é o módulo de Young

$\nu$  é o coeficiente de Poisson.

### 2.4.5 Método dos pórticos equivalentes

O cálculo de lajes sem vigas pelo processo dos pórticos equivalentes pode fornecer resultados satisfatórios, como afirma Emerick (2005). No entanto, o uso desse método é limitado a situações específicas. Existem três métodos dos pórticos equivalentes de interesse para o presente estudo: norma brasileira, norma americana e o da norma européia (o mesmo adotado pela norma inglesa).

Apesar de partirem do mesmo princípio de análise, os métodos fornecem resultados diferentes uns dos outros. Para ilustrar a diferença, foi calculado o valor médio de momentos transferidos aos pilares para uma mesma configuração de laje com assimetria no pilar, variando a altura da laje, pelos três métodos. Os resultados podem ser visualizados na Figura 2.24. As

porcentagens são dadas em relação aos resultados do método do ACI.

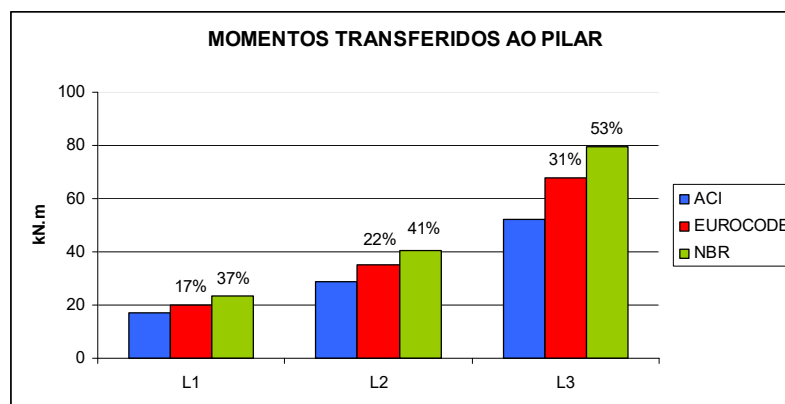


Figura 2.24 – Diferença percentual dos momentos desbalanceados pelo método de cada norma

#### a) Norma Brasileira

O método dos pórticos equivalentes proposto pela norma brasileira consiste em dividir a estrutura em cada direção em uma série de pórticos constituídos por colunas e barras horizontais, cujas inércias serão iguais às da laje delimitada pela metade da distância entre duas linhas de pilares, como mostra a Figura 2.25.

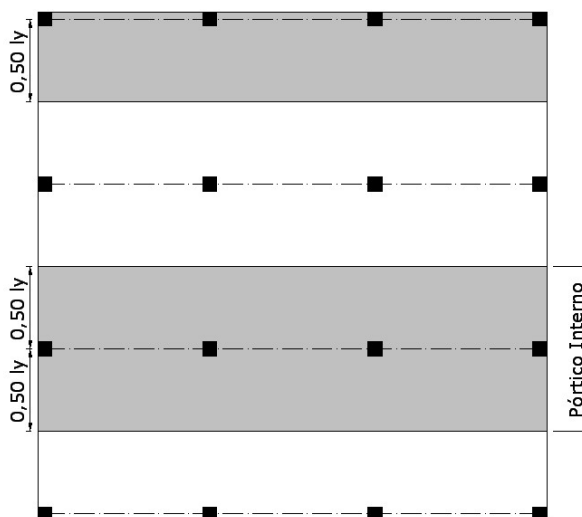


Figura 2.25 – Definição dos pórticos segundo a norma brasileira (EMERICK, 2005)

Para o cálculo dos pórticos, os pilares acima e abaixo da laje devem ser considerados engastados em suas extremidades se for considerada sua altura total, ou simplesmente apoiados se for considerada metade da sua altura (CARVALHO & PINHEIRO, 2009).

Para cada pórtico deve ser considerada a carga total. A distribuição dos momentos, obtida em cada direção deve ser feita da seguinte maneira:

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 37,5% dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

A distribuição dos momentos proposta pela norma brasileira requer o entendimento de que são as faixas internas e externas do painel. Essas faixas são consideradas conforme a Figura 2.26.

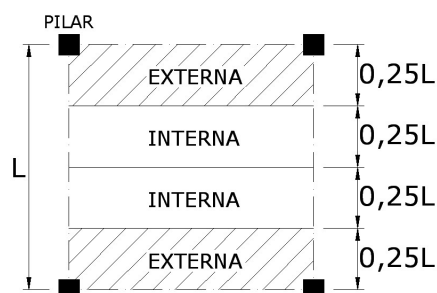


Figura 2.26 – Faixas para a distribuição dos momentos segundo a norma brasileira

#### b) Normas Européia e Inglesa

O método dos pórticos equivalentes proposto pela norma inglesa (BS 8110/97) e européia (EC2/04) é bastante parecido com o proposto pela norma brasileira, com exceção de alguns detalhes apresentados abaixo.

A estrutura deve ser dividida em uma série de pórticos nas duas direções ortogonais constituídos por colunas e barras horizontais, cujas inércias serão iguais às da seção bruta de cada elemento.

A largura da laje a ser considerada na divisão dos pórticos depende da relação entre os vãos em cada sentido ortogonal da laje. A divisão é feita conforme a Figura 2.27.

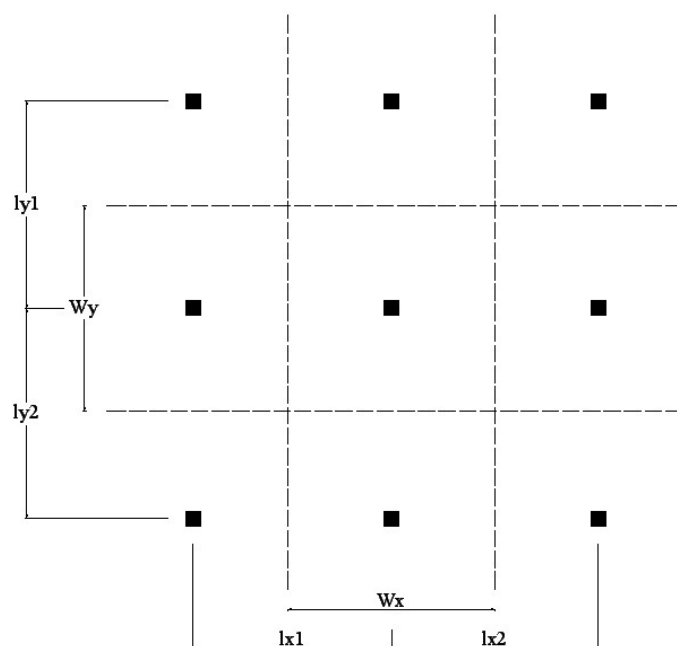


Figura 2.27 – Divisão dos pórticos

Portanto, ainda em relação à Figura 2.27, a divisão dos pórticos deve ser feita por:

$$\text{Quando } l_y < 2l_x \rightarrow \begin{aligned} W_x &= (l_{x1} + l_{x2})/2 \\ W_y &= (l_{y1} + l_{y2})/2 \end{aligned}$$

$$\text{Quando } l_y > 2l_x \rightarrow \begin{aligned} W_x &= (l_{x1} + l_{x2})/2 \\ W_y &= 2W_x \end{aligned}$$

Para o cálculo dos pórticos, os pilares acima e abaixo da laje devem ser considerados engastados em suas extremidades e deve ser considerada sua altura total.

A distribuição dos momentos nas faixas proposta pelas normas inglesa e européia é considerada conforme a Figura 2.28.

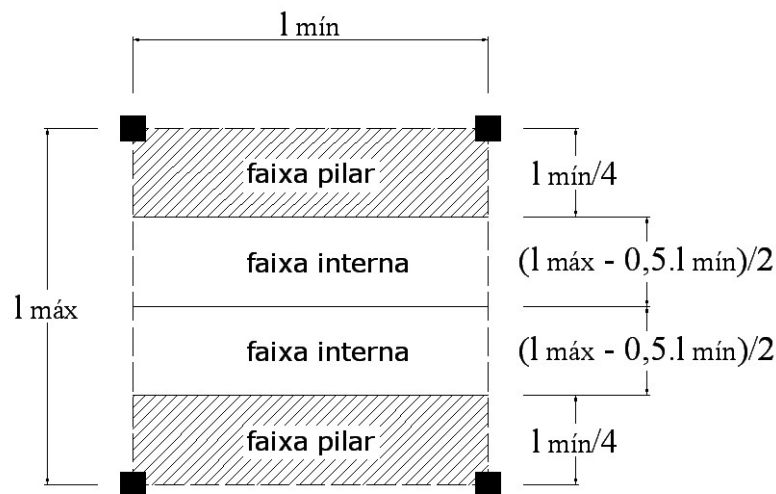


Figura 2.28 – Faixas para a distribuição dos momentos

A diferença nos métodos da norma inglesa e européia está na distribuição dos momentos obtidos em cada direção. A distribuição dos momentos é apresentada nos Quadros 2.2 e 2.3.

Quadro 2.2 – Distribuição dos momentos nas faixas pela norma inglesa

Momentos	Faixa pilar (%)	Faixa interna (%)
Negativos	75	25
Positivos	55	45

Quadro 2.3 – Distribuição dos momentos nas faixas pela norma européia

Momentos	Faixa pilar (%)	Faixa interna (%)
Negativos	60-80	40-20
Positivos	50-70	50-30

### c) Norma Americana

O método dos pórticos equivalentes proposto pela norma americana apresenta a mesma definição da largura dos pórticos apresentada pela norma brasileira. Quanto à definição das faixas para a distribuição dos momentos, o ACI considera a largura das faixas definidas por 25% do menor vão da laje, assim como as normas inglesa e européia.

A distribuição dos momentos obtidos em cada direção deve ser feita conforme a Figura 2.29.

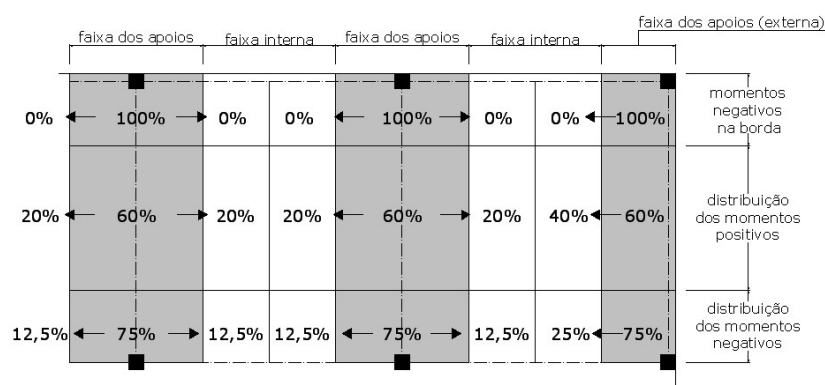


Figura 2.29 – Coeficientes para a distribuição dos momentos de acordo com o ACI

O ACI permite aumentar a rigidez na região dos pilares em razão da existência de capitéis, engrossamentos e até mesmo pela própria existência do pilar. Nesses casos, o momento de inércia da “laje-viga” na região que vai do eixo do pilar até sua face externa é tomado como o valor do seu momento de inércia na face do pilar (considerando a existência ou não de engrossamento) dividido por:

$$\left(1 - \frac{c_A}{l_2}\right)^2 \quad [eq. 2.44]$$

Onde:

$c_A$  é a dimensão do apoio na direção transversal ao pórtico;

$l_2$  é o vão na direção transversal ao pórtico.

O ACI leva em consideração o fato de existir uma grande diferença de largura entre a laje do pórtico e o pilar no cálculo do pórtico equivalente. Essa consideração é feita atribuindo-se uma rigidez à torção no encontro do pilar com a laje do pórtico. A partir da combinação da rigidez do elemento de torção com a do pilar, calcula-se uma rigidez equivalente  $k_{ec}$ , dada por:

$$\frac{1}{k_{ec}} = \frac{1}{\sum k_c} + \frac{1}{k_T} \quad [eq. 2.45]$$

Onde:

$1/k_{ec}$  é a flexibilidade do pilar equivalente;

$\sum k_c$  é a soma da rigidez dos pilares acima e abaixo da laje do pórtico;

$k_T$  é a rigidez do elemento torcional.

A rigidez de uma barra bi-engastada pode ser calculada por:

$$k_c = \frac{4E_c I_c}{L_c} \quad [eq. 2.46]$$

Onde:

$E_c$  é o módulo de elasticidade do pilar;

$I_c$  é o momento de inércia do pilar;

$L_c$  é o comprimento do pilar.

Segundo o ACI, a rigidez do elemento torcional pode ser calculada por:

$$k_T = \sum \frac{9E_c C_{eq}}{l_2 \cdot (1 - c_A / l_2)^3} \quad [eq. 2.47]$$

Sendo:

$$C_{eq} = \sum \left[ \left( 1 - 0,63 \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{x^3 y}{3} \right] \quad [eq. 2.48]$$

Onde:

$x$  e  $y$  são o menor e o maior lado do retângulo que compõe a seção transversal laje-pilar, como mostra a Figura 2.30.

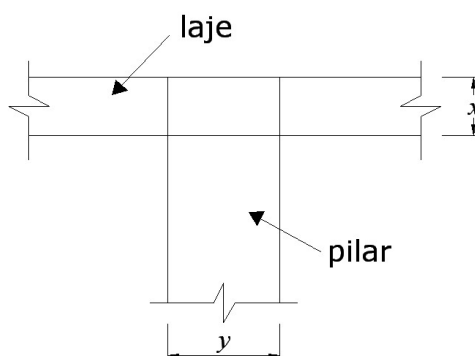


Figura 2.30 – Valores de  $x$  e  $y$  para a seção transversal laje-pilar (EMERICK, 2005)

Uma possibilidade para considerar a rigidez equivalente do pilar com uso de programas computacionais é por meio do cálculo de um comprimento equivalente para o pilar, de tal forma que a rigidez do pilar passe a ser a rigidez equivalente do conjunto, como mostra a Figura 2.31.



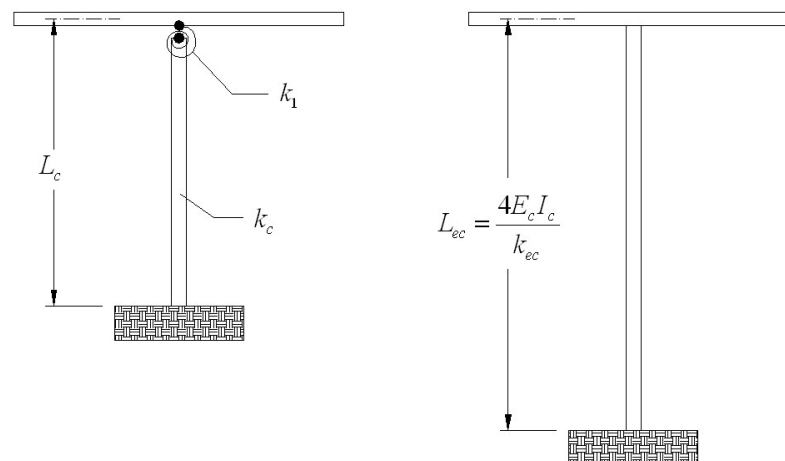


Figura 2.31 – Pilar equivalente (EMERICK, 2005)

## 2.5 Análise de confiabilidade

A concepção de um projeto estrutural envolve diversos parâmetros, cujas incertezas podem influenciar em maior ou menor grau sua segurança e utilização. As variabilidades podem estar presentes nas propriedades mecânicas dos materiais, nas configurações e valores das ações consideradas, na geometria da estrutura ou ainda nos modelos de cálculo e de análise estrutural, sendo estes últimos uma função do conhecimento geral que se tem do problema, das ferramentas de análise ou da solução adotada pelo engenheiro calculista. Nesse sentido, a segurança de uma estrutura deve ser avaliada em termos probabilísticos (STUCCHI, 2010).

Neste item são apresentados os conceitos básicos da confiabilidade estrutural necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

### 2.5.1 Variáveis aleatórias

As respostas de um fenômeno aleatório podem ser identificados numericamente, e estas respostas ou eventos podem ser identificados pelos valores de uma função. Assim, uma variável aleatória pode ser definida como uma variável que associa um número ao resultado de uma função (ANG & TANG, 1975). Normalmente uma variável aleatória é identificada por uma letra maiúscula e pode ser do tipo discreta, quando puder assumir um número finito ou infinito contável de valores, ou do tipo contínua quando puder assumir um número infinito de valores.

### 2.5.2 Função de distribuição de probabilidades

Ao longo do trabalho as variáveis aleatórias envolvidas foram representadas por funções padrão de distribuição de probabilidades. Este item apresenta os fundamentos das funções de distribuição de probabilidades.

- **Função de distribuição acumulada de probabilidades (FDA)**

Como o valor de uma variável aleatória representa um evento, ela pode assumir determinado valor com uma probabilidade associada. Uma função de distribuição acumulada de probabilidades de uma variável aleatória  $X$  pode ser representada por (ANG & TANG, 1975):

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] \quad [eq. 2.49.a]$$

Definida para qualquer número  $x$  no intervalo  $(-\infty \leq x \leq \infty)$ , onde:

$x$  – dado valor para o qual  $F_X(x)$  é igual a probabilidade de que  $X$  assuma um valor menor ou igual ao valor dado.

$F_X(x)$  - probabilidade que a variável aleatória  $X$  assuma qualquer valor menor que  $x$ .

Assim,  $F_X(x)$  fornece a probabilidade da variável aleatória  $X$  assumir um valor menor ou igual a  $x$ .

No caso de haverem duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , os conjuntos  $\{X \leq x\}$  e  $\{Y \leq y\}$  formam eventos cujas probabilidades são dadas por:

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] \quad [eq. 2.49.b]$$

$$F_Y(y) = P[\{Y \leq y\}] \quad [eq. 2.49.c]$$

onde  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$  são as funções de distribuição cumulativa de probabilidades das variáveis  $X$  e  $Y$  (BECK, 2012). A probabilidade deste evento, que é função de  $x$  e  $y$  é chamada de função conjunta de distribuição cumulativa de probabilidades:

$$F_{XY}(x, y) = P[\{X \leq x, Y \leq y\}] \quad [eq. 2.49.d]$$

- **Função de densidade de probabilidades (*Probability Density Function* - PDF)**

Sendo  $X$  uma variável aleatória contínua, a probabilidade de  $X$  estar entre um intervalo  $a$  e  $b$  é obtida pela integral de  $f_X(x)$  no intervalo  $ab$ . Portanto, para uma variável aleatória contínua em  $X$ , a função de densidade de probabilidade deve atender (ANG & TANG, 1975):

$$f_X(x) \geq 0 \quad [eq. 2.50]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad [eq. 2.51]$$

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx \quad [eq. 2.52.a]$$

onde  $\int_a^b f_X(x) dx$  fornece a área sob a curva entre os pontos  $a$  e  $b$  e a PDF é a derivada em relação à  $x$  da FDA.

No caso de haverem duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , e se a função  $F_{XY}(x, y)$  possui derivadas parciais até segunda ordem, então a função conjunta de densidades de probabilidades das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  será dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad [eq. 2.52.b]$$

Similarmente, é possível obter as funções de distribuição e de densidade de ordem superior.

- **Média e desvio padrão**

A média  $\mu$  ou valor esperado  $E(X)$  de uma variável aleatória  $X$  é dada por:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad [eq. 2.53]$$

O desvio padrão  $\sigma$  de uma variável aleatória  $X$  é obtido pela raiz quadrada de variância  $V(X)$ , e é dado por:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \quad [eq. 2.54]$$

onde:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \quad [eq. 2.55]$$

O Quadro 2.4 apresenta alguns parâmetros das distribuições contínuas de probabilidades usadas neste trabalho.

Quadro 2.4 – Distribuições contínuas de probabilidades (BECK, 2012)

Distribuição	$f_X$	Parâmetros		Média ( $\mu$ )	Variância ( $\sigma^2$ )
		p1	p2		
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma^2$
Lognormal	$\frac{1}{\xi x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2\right]$	$\lambda$	$\xi$	$\exp[\lambda + 0,5. \xi^2]$	$\mu^2[\exp(\xi^2) - 1]$
Gumbel-máx	$\beta \exp[\beta(x - u_n) - e^{\beta(x-u_n)}]$	$u_n$	$\beta$	$u_n - \frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\pi^2}{6\beta^2}$
Gumbel-min	$\beta \exp[\beta(x - u_1) - e^{-\beta(x-u_1)}]$	$u_1$	$\beta$	$u_n - \frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\pi^2}{6\beta^2}$

### 2.5.3 Estimativa da confiabilidade

A verificação da falha por punção é feita com relação à variáveis aleatórias de projeto, cujas amplitude de variabilidades podem influenciar na segurança. Em um estudo probabilístico da falha estrutural, deve-se levar em conta a equação de estado limite, que é dada em função das variáveis de projeto  $\mathbf{X}$ :

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad [eq. 2.56]$$

sendo que:

$$g(\mathbf{X}) < 0 \quad [eq. 2.57]$$

indica falha da estrutura.

No caso da punção, a equação de estado limite último é dada em função das variáveis tensão resistente e tensão solicitante. A resistência é a capacidade do componente suportar determinada condição sem que haja falha. Entende-se como solicitação a condição à qual o componente está submetido.

$$g(R, S) = R - S = 0 \quad [eq. 2.58]$$

onde:

$g(R, S)$  - equação limite em função das variáveis de projeto R e S;

$R$  - Variável resistência;

$S$  - Variável solicitação.

Portanto, supondo as variáveis resistência e solicitação como aleatoriamente distribuídas, é possível analisar a probabilidade de falha de um componente, de uma maneira similar a apresentada na Figura 2.32. A área hachurada, onde há interferência das funções de solicitação e da resistência, mostra uma região de falha, pois é uma região onde a solicitação pode superar a resistência. A probabilidade de falha é proporcional, mas não idêntica, à área de interferência entre as distribuições.

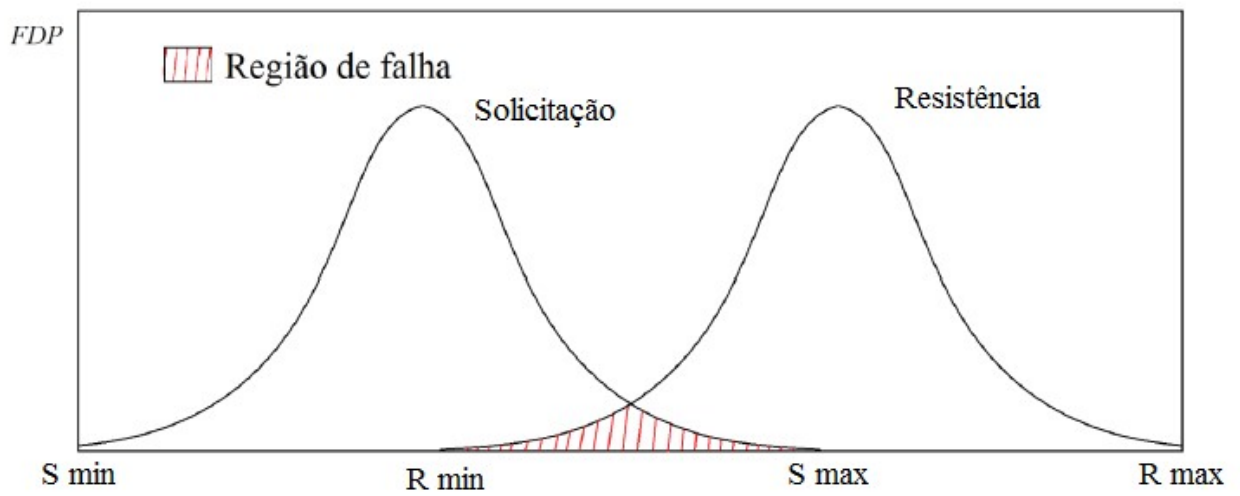


Figura 2.32 – Interferência entre as distribuições das funções de solicitação e resistência (SOUZA, 2013)

A probabilidade de falha pode ser entendida como uma medida probabilística de relação dos estados limites inferior a zero, representada por:

$$P_f = P[\{R \leq S\}] = P[\{R - S\} \leq 0] \quad [eq. 2.59]$$

Segundo Beck (2012), a avaliação desta probabilidade dá origem ao chamado problema fundamental da confiabilidade, onde  $P_f$  pode ser obtida por:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_{RS}(r, s) dr ds \quad [eq. 2.60]$$

onde:

$f_{RS}(r, s)$  - função conjunta de densidade de probabilidades da resistência e solicitação.

A [eq. 2.60.a] também pode ser escrita como:

$$P_f = \int_{g(X) \leq 0} f_X(x) dx \quad [eq. 2.61]$$

onde:

$f_X(x)$  - função conjunta de densidade de probabilidades das variáveis aleatórias básicas

$g(X)$  – equação de estado limite para o modo de falha considerado

O índice de confiabilidade  $\beta$  é de extrema importância, pois fornece informação sobre a confiabilidade estrutural. Para variáveis independentes com distribuição normal de probabilidades, o índice de confiabilidade  $\beta$  é dado por:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad [eq. 2.62]$$

Para a resolução de problemas envolvendo um número qualquer de variáveis aleatórias, uma estimativa de primeira ordem da probabilidade de falha é obtida como (BECK, 2012):

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad [eq. 2.63]$$

onde:

$\Phi()$  - função de distribuição acumulada da variável normal padrão com média igual a zero e desvio padrão igual a um. Para outros tipos de distribuição, devem-se usar funções normais equivalentes (VERZENHASSI, 2008).

O índice  $\beta$  é uma medida geométrica entre o ponto de projeto ou ponto mais provável de falha, e a média (ou origem) da distribuição conjunta de probabilidades.

A probabilidade de falha pode ser reduzida através do uso de coeficientes de segurança, que afastam as médias das distribuições de R e S. Conforme Beck (2012), o coeficiente de segurança central relaciona as médias das variáveis de resistência e solicitação, conforme:

$$\lambda_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S} \quad [eq. 2.64]$$

onde:

$\lambda_0$  - Coeficiente de segurança central.

Segundo Verzenhassi (2008), sendo  $\lambda_0$  uma constante, devido à variabilidade dos valores de R e S, não haveria garantias de que uma constante assegurasse a confiabilidade da estrutura.

O JCSS (2001) fornece um quadro com índices de confiabilidade mínimos para situações diversas, conforme Quadro 2.5:

**Quadro 2.5 –  $\beta$  alvo para estados limites últimos com período de retorno de um ano (JCSS, 2001)**

Medida relativa do custo de segurança	Consequencias leves de falha	Consequencias moderadas de falha	Consequencias graves de falha
Grande	$\beta = 3,1 (P_f \approx 10^{-3})$	$\beta = 3,3 (P_f \approx 5.10^{-4})$	$\beta = 3,7 (P_f \approx 10^{-4})$
Normal	$\beta = 3,7 (P_f \approx 10^{-4})$	$\beta = 4,2 (P_f \approx 10^{-5})$	$\beta = 4,4 (P_f \approx 5.10^{-6})$
Pequeno	$\beta = 4,2 (P_f \approx 10^{-5})$	$\beta = 4,4 (P_f \approx 5.10^{-6})$	$\beta = 4,7 (P_f \approx 10^{-6})$

Segundo a classificação do JCSS (2001), consequencias moderadas de falha significam que o risco de vida, dada uma falha, é médio ou as consequencias econômicas são consideráveis, tendo como exemplos construções residenciais, comerciais ou industriais. Consequencias graves de falha são as que o risco de vida, dada uma falha, é alto ou as consequencias econômicas são significantes, tendo como exemplos pontes, teatros, hospitais e edifícios altos.

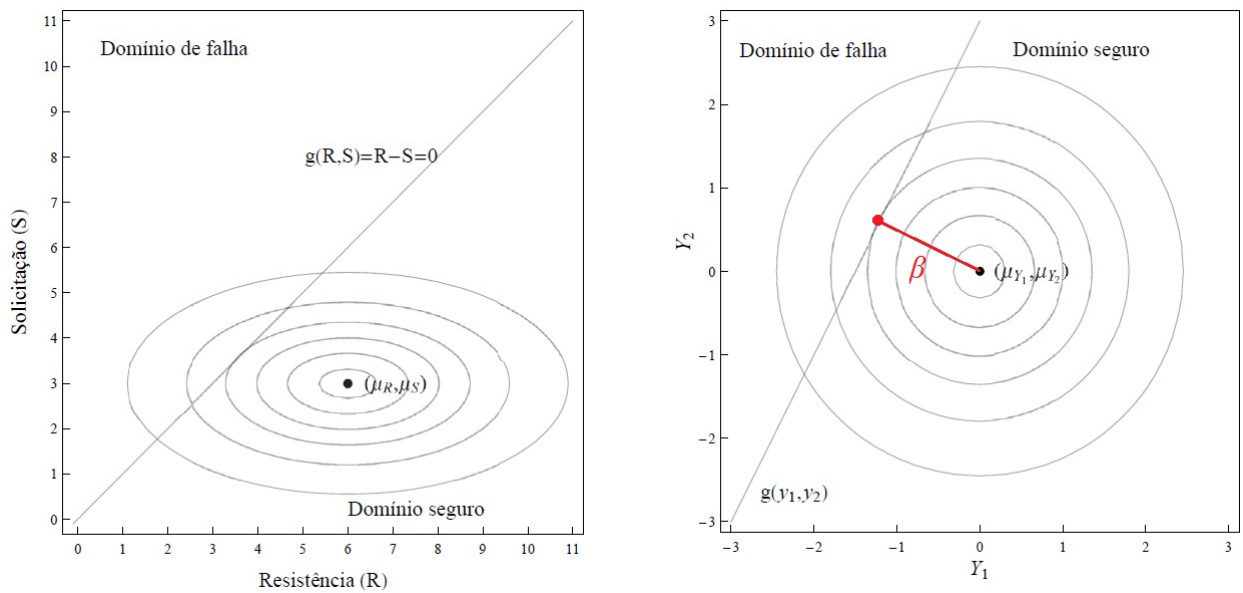
No caso mais geral, a definição do ponto de projeto e o cálculo do índice de confiabilidade  $\beta$  correspondente demandam a utilização de procedimentos iterativos. Desta forma, a solução da [eq. 2.60] pode ser efetuada por exemplo por métodos de simulação, como Monte Carlo, ou métodos de transformação, como o FORM (*first order reliability method*) e o SORM (*second order reliability method*). A solução de problemas de confiabilidade via FORM ou SORM, para equações de estado limites, envolve a solução de um problema de otimização para busca do ponto de projeto. Neste trabalho é utilizado o método SORM para o cálculo das probabilidades de falha pelo menor custo computacional em relação aos métodos de simulação e ser uma tentativa de melhoria do FORM pelo uso de uma aproximação quadrática. A fundamentação dos métodos de transformação é brevemente apresentada na sequência.

- **Métodos de Transformação**

Os métodos de confiabilidade estrutural de transformação são caracterizados pela transformação do vetor de variáveis aleatórias do problema  $X$ , com qualquer distribuição conjunta de probabilidades, em um vetor de variáveis aleatórias  $Y$ , com distribuição normal padrão. Os métodos de transformação são baseados na transformação de Hasofer e Lind, que transforma um o

vetor de variáveis Gaussianas  $X$  com média e desvios-padrão quaisquer, em um conjunto  $Y$  de variáveis aleatórias normais com média nula e desvio padrão unitário (BECK, 2012).

O índice de confiabilidade  $\beta$  pode ser interpretado geometricamente, aplicando a transformação de Hassofer e Lind ao problema de confiabilidade fundamental e resolvendo um problema de otimização, onde se deve encontrar as coordenadas de um ponto (ponto de projeto) que minimiza a distância deste ponto à origem, sujeito à equação de estado limite transformada ser igual a zero ( $g(y_1, y_2) = 0$ ). O ponto de projeto é o ponto sobre o domínio de falha com maior probabilidade de ocorrência. Transformando as variáveis  $R$  e  $S$  da equação de estado limite nas variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  usando a transformação de Hassofer e Lind, verifica-se que o índice de confiabilidade  $\beta$  é uma medida geométrica da probabilidade de falha. A transformação para o espaço normal padrão dá origem a uma distribuição multi-normal padrão com simetria radial, cujas curvas de equi-probabilidade são círculos concêntricos centrados na origem (BECK, 2012). A Figura 2.33 mostra a medida geométrica de  $\beta$  e a distribuição multi-normal padrão.



**Figura 2.33 – Interpretação gráfica do problema da confiabilidade estrutural e a transformação para o espaço normal padrão (BECK, 2012)**

O fato de o índice de confiabilidade  $\beta$  ser uma medida geométrica da probabilidade de falha permite estender a solução para problemas multi-dimensionais, e permite que problemas de confiabilidade independente do tempo, como o do presente estudo, sejam resolvidos utilizando algoritmos de otimização. Um algoritmo muito conhecido é o de Hassofer, Lind, Rackwitz e Fiessler, ou HLRF (BECK, 2012).

Segundo Beck (2012), para problemas  $n$ -dimensionais, deve-se resolver o problema de otimização onde quer se encontrar o ponto de projeto minimizando a norma euclidiana do vetor  $Y$ , sujeito à equação de estado limite transformada igual a zero ( $g(y) = 0$ ).



Em uma aproximação de primeira ordem – método FORM -, a superfície de estado limite é aproximada pelo hiperplano tangente ao ponto de projeto e a probabilidade do domínio de falha é dada pela [eq. 2.63]. Em uma aproximação de segunda ordem - método SORM -, aproxima-se a equação de estado limite no ponto de projeto por superfícies quadráticas ou parabólicas, e o resultado da probabilidade de falha é dado por (BECK, 2012):

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\beta k_i}} \quad [eq. 2.65]$$

onde  $k_i$  são as curvaturas principais da superfície de estado limite no ponto de projeto.

## 3 *Pesquisas Relevantes*

Este capítulo expõe algumas pesquisas importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente são apontadas pesquisas referentes à punção, de modo a mostrar que o foco de grande parte das pesquisas está no fenômeno da punção, dando menor importância à visão integrada flexão punção. Na sequência são mostrados estudos referentes à influência dos esforços em lajes lisas segundo diferentes modelagens de pilar. Depois, são apresentados trabalhos onde são estudadas as diferenças em valores de esforços em estruturas com lajes lisas por diferentes métodos de cálculo. Alguns trabalhos, como os desenvolvidos por Hrabok & Hruby (1984), Hennrichs (2003), Pedrozo (2008), Puel (2009), Silva (2013) e Skorpén & Dilger (2014), discorrem tanto sobre modelagem de pilares internos como diferentes métodos de análise. Por fim, referem-se algumas pesquisas sobre incertezas de modelo e confiabilidade.

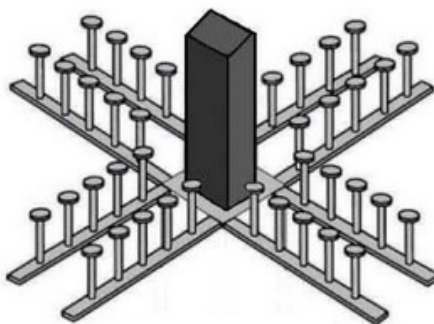
### 3.1 Punção

Algumas pesquisas relevantes feitas sobre a punção e a dificuldade em se resolver este problema são descritas. Pretende-se indicar que a maioria das pesquisas sobre punção estão focadas em situações específicas de ensaios e simulações numéricas, com poucos estudos sobre os problemas de projeto de lajes lisas na região de apoio nos pilares. Inicialmente apresentam-se algumas pesquisas com estudos experimentais e também alguns estudos com simulação numérica para análise da punção.

#### 3.1.1 Estudos experimentais

Os estudos experimentais têm um papel importante na compreensão do fenômeno da punção, tanto na compreensão dos parâmetros envolvidos no equacionamento das normas como para bases de comparação com os novos modelos numéricos. Muitas das teorias e modelos de cálculo de punção são baseados nos resultados de diversos ensaios disponíveis na literatura. Alguns dos principais estudos experimentais nacionais e internacionais que trouxeram contribuição à compreensão do fenômeno da punção são apresentados em ordem cronológica.

Em 1980, Ghali & Megally apud Melges (2001), realizaram ensaios em quinze lajes quadradas com lado igual a 1900 mm, armadas com armadura de punção tipo *stud* (Figura 3.1). Ghali & Megally (1980) verificaram em seus ensaios que nas lajes com armadura de cisalhamento a ruptura não foi frágil e estas ainda obtiveram uma ductilidade maior do que nas lajes sem armadura de cisalhamento.



**Figura 3.1 – Exemplo de armadura de punção tipo *studs*.**

Fonte: <http://www.truweldstudwelding.com/psrtechsheet.html> (2015)

Fusco (1985) verificou em ensaios experimentais de lajes armadas com conectores tipo pino, que o entrosamento dos agregados ao longo da superfície de ruptura e o efeito de pino da armadura de flexão são elementos essenciais na resistência das lajes ao cisalhamento. Ele menciona ainda que o esquema resistente tipo treliça existe somente na vizinhança da força concentrada.

Em seu trabalho de 1985, Regan faz menção à existência de três possibilidades de ruptura da ligação laje-pilar reforçada com armadura de punção: a primeira refere-se a uma superfície de ruptura junto à face do pilar, a segunda na região transversalmente armada, e a terceira além da região armada. Regan afirma que para uma laje sem armadura de cisalhamento a superfície de ruptura forma um ângulo de aproximadamente  $25^\circ$  com o plano da laje, com origem na face do pilar, para a situação de carregamento simétrico. A partir dessa conclusão, Regan (1985) sugeriu que ao se adicionar um elemento de armadura de cisalhamento, posicionado a uma distância que force a mudança da inclinação da superfície de ruptura, haverá um acréscimo para a contribuição do concreto na carga de ruptura. Este acréscimo é moderado até que a inclinação se aproxime de  $45^\circ$  e, a partir desta inclinação, o aumento é bastante significativo.

Em Shehata (1985) é descrito um modelo racional para o cálculo da punção em pilares internos com carregamento simétrico e sem armadura de punção. Em Shehata (1990), é apresentado um modelo simplificado composto de bielas comprimidas e tirantes radiais. Pinto (1993) menciona que este modelo é de fácil aplicação e em geral fornece bons resultados. Porém, para ensaios onde a resistência do concreto à compressão é elevada, o modelo superestimou os valores das cargas de ruína.

Gomes (1991), realizou diversos ensaios estudando o efeito da armadura de cisalhamento em lajes de concreto armado submetidas a carregamento simétrico. Para servir como armadura de cisalhamento foram usados perfis metálicos de seção “I”, cortados com uma espessura “s” de acordo com a área de armadura transversal necessária.

Em seus ensaios, Gomes (1991) pode concluir que usando armadura de punção, pode-se obter um aumento na resistência à punção por vezes maior que 100% em lajes de concreto armado. A forma de distribuição da armadura de cisalhamento é um importante parâmetro e pode limitar a resistência à punção de uma laje, como foi verificado nos ensaios realizados, em que a disposição radial da armadura de cisalhamento proporcionou melhores resultados que a do tipo dupla cruz. Gomes (1991) recomenda ainda que a distância entre os elementos da armadura de cisalhamento

não deve exceder 0,5d.

No estudo de Regan (1993), foi realizado um ensaio em que se inseria uma armadura de cisalhamento distribuída em forma de estrela, chamada de Riss Star, entre as armaduras de flexão. A resistência à punção sofreu um acréscimo entre 65% e 69% em relação a uma laje sem armadura de cisalhamento com características similares. Regan, (1993) detectou a formação de dois planos horizontais de fissuras entre a armadura de cisalhamento e as armaduras de flexão, entretanto foram detectadas também fissuras diagonais ao se fazer um corte na laje.

O estudo desenvolvido por Melo (1990) mostrou a importância do uso de uma armadura junto à armadura de flexão inferior na laje, de modo a evitar o colapso progressivo, caso ocorra a ruptura da ligação laje-pilar.

Melges (1995) realizou estudos e ensaios onde propôs que se adicionasse ao critério do CEB CM90 o efeito do momento, atuando perpendicularmente à borda, ao da força nos pilares de borda e canto, com a intenção de evitar erro de equilíbrio.

Cordovil e Fusco (1995) apresentaram ensaios com a finalidade de estudar o comportamento de lajes lisas com armadura de cisalhamento, constituídas por elementos tipo pino com chapas de ancoragem soldadas na extremidade. Comparando-se as lajes com armadura de cisalhamento com as lajes sem armadura de cisalhamento, ocorreu um aumento da resistência à punção de, aproximadamente, 17% para as lajes submetidas a carregamento simétrico e para o caso das lajes com carregamento excêntrico o ganho foi de 54%.

Elgabry e Ghali (1996) realizaram estudos experimentais e numéricos em conjunto relacionados à punção. No primeiro deles são apontados resultados experimentais sobre o uso de conectores tipo pino em ligações laje-pilar, submetidas a um momento fletor desbalanceado. Em seu outro estudo, expõem algumas propostas sobre o assunto para a revisão do ACI.

Em 1996, Hallgren realizou ensaios utilizando concreto de alto desempenho e armadura de cisalhamento com barras dobradas, formando um ângulo aproximado de 33° com a horizontal. Hallgren observou que todas as lajes com baixas taxas de armadura de flexão e com armadura de cisalhamento tiveram um comportamento mais dúctil antes de alcançar a ruptura. O acréscimo de resistência com a utilização de barras dobradas chegou a 69%. Verificou também a influência das barras dobradas no comportamento pós puncionamento das lajes, que introduziu nas lajes com armadura de cisalhamento uma carga residual em torno de 50% da carga última.

Menétrey (1998) realizou ensaios para verificação de falhas em lajes lisas por flexão e por punção, controlando as deformações no pilar, de modo a estudar a curva da relação carregamento-deformação e permitiu verificar que as falhas por flexão são caracterizadas por uma redução gradativa da capacidade de carga, ou seja, é uma falha dúctil, enquanto as falhas por punção apresentaram uma redução brusca dessa capacidade. A Figura 3.2 apresenta o diagrama de deformações para rupturas por flexão e punção.

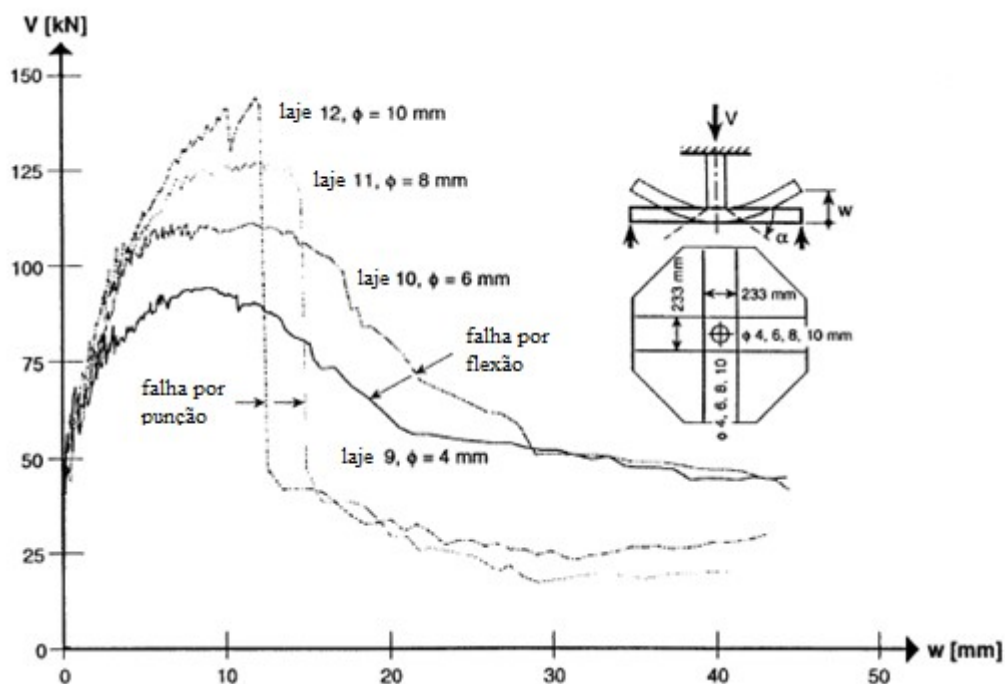


Figura 3.2 – Curvas de falhas por punção e por flexão (MENÉTREY, 1998)

Menétrey mostrou que a inclinação das fissuras no caso de ruptura por punção fica em torno de  $30^\circ$  em relação ao plano da laje. Percebeu que com o aumento dessa inclinação a falha se dava por flexão, e baseado nessa transição propôs uma nova fórmula baseada na resistência à tração do concreto.

Um estudo baseado em estudar a adição de fibras de aço no concreto somado à armadura de cisalhamento no combate à punção foi apresentado por Musse (2004). As lajes foram divididas em dois grupos, com e sem adição de fibras de aço no concreto e a armadura de punção utilizada era do tipo pino (*stud*). Musse observou pelos seus estudos que a presença das fibras modificou o modo de ruptura da laje. A adição das fibras fez com que a ruptura ocorresse na região armada transversalmente, sendo que sem a adição das fibras a ruptura ocorria na região externa à armação. Com a combinação da armadura de cisalhamento e das fibras de aço foi possível aumentar a carga de ruptura da laje em até 75% em relação a uma laje sem fibras e sem armadura de cisalhamento.

Carvalho (2004) realizou um estudo a fim de verificar o efeito da utilização de armadura de cisalhamento na região de pilares interiores de lajes lisas protendidas com cabos não-aderentes. As investigações foram feitas a partir de resultados experimentais obtidos dos ensaios de 09 lajes e os resultados foram comparados com recomendações da NB1. Carvalho pode concluir com as análises feitas a partir da comparação entre os resultados experimentais e as estimativas de norma que, para verificação, as recomendações da NBR 6118 levaram à estimativas a favor da segurança do valor da resistência ao puncionamento em todas as lajes avaliadas, mas apenas uma das lajes apresentou modo de ruptura próximo ao estimado.

Em 2006, Trautwein apresentou um estudo experimental e numérico, onde analisava lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento, sem envolver a armadura de flexão.

A Figura 3.3 apresenta duas das lajes rompidas por punção nos ensaios.

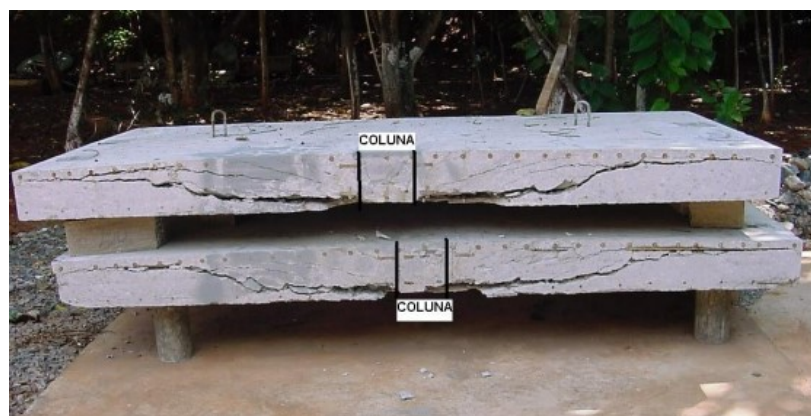


Figura 3.3 – Lajes cortadas ao meio após a ruptura nos ensaios (TRAUTWEIN, 2006)

O principal objetivo dos ensaios efetuados por Trautwein foi investigar a eficiência de se utilizar esse tipo de armadura de cisalhamento sem envolver a armadura de flexão. Todas as lajes romperam por punção, com cargas de ruptura superiores em até 110%, em relação às cargas de ruptura em lajes similares sem armadura de cisalhamento, demonstrando a eficiência da armadura. Nas simulações numéricas foram realizadas utilizando modelos axissimétricos e tridimensionais, de lajes cogumelo de concreto armado, com o objetivo de reproduzir numericamente alguns resultados obtidos por pesquisadores e documentados na literatura, validando a parte experimental e a modelagem numérica.

Em 2010, Gomes, sob a orientação do Prof Melo, desenvolveu uma tese de doutorado na UNB onde estudou-se o puncionamento de lajes lisas protendidas em pilares de extremidade e momentos desbalanceados atuando nas duas direções. Foram feitos ensaios em dezesseis lajes buscando avaliar a relação do momento transferido  $M/V$ , do perímetro crítico  $C'/d$  e do nível de protensão da resistência à punção. Segundo os resultados apresentados por Gomes, a norma americana e a brasileira apresentaram valores bastante conservadores quando comparadas à norma européia EC2, sendo que nenhuma destas apresentou valores bons para relações  $C'/d$  maior que 2,0. Por fim, apresentou modificações nas normas estudadas afim de ajustar os valores fornecidos com os obtidos nos seus ensaios.

Também sob a orientação do Prof Melo, Neto (2012) realizou um estudo sobre punção em lajes cogumelo de concreto armado com capitéis em seu trabalho de doutorado. Seu trabalho experimental contou com o ensaio de doze lajes sob carregamento simétrico com variação da seção transversal dos pilares, da espessura e da inclinação dos capitéis. Os resultados obtidos foram comparados com a NBR 6118/03, o EC2:2004 e com a *Shear Crack Theory* desenvolvida por Muttoni (1985) adotada mais tarde pelo MC2010. quando comparadas com as recomendações do EC2 e na NBR 6118, observou-se que os valores das cargas de ruptura experimentais apresentaram valores próximos aos estimados. Já para a *Shear Crack Theory* observaram-se resultados conservadores, haja vista que a teoria usa um perímetro de controle com raio de  $0,5 \cdot d$  a partir da face do pilar e do limite

do capitel. Compararam-se os resultados também com modelo computacional axissimétrico para melhor compreensão dos mecanismos de ruptura do capitel, onde pode se observar resultados bastante parecidos com os obtidos experimentalmente.

Grimaldi et al. (2013) testaram placas finas de concreto armado com adição de fibras para estudar o comportamento de tabuleiro de pontes. Verificaram que a adição de fibras aumentou a resistência das lajes à punção, assim como aumentou sua ductilidade.

Oliveira (2013) apresentou seu trabalho de doutorado pela UNB sobre punção em lajes lisas com armadura de cisalhamento submetidas a efeito de momentos, onde ensaiou dezessei lajes com diferentes tipos e disposições de armadura de cisalhamento. Comparando os resultados obtidos com algumas normas, Oliveira observou que a NRB 6118 forneceu valores contra a segurança em muitos casos, sendo que o EC2 apresentou os melhores resultados. O ACI-318 apresentou valores muito a favor da segurança. O MC2010 apresentou valores satisfatórios, tanto para o modelos I como para o II.

Em 2014, Albuquerque apresentou um estudo experimental sobre o comportamento das ligações de lajes lisas de concreto armado com pilares de borda sujeitas a cargas excêntricas. Albuquerque ensaiou treze lajes onde a principal variável estudada foi a excentricidade das cargas, além de outros fatores como armaduras transversais e de flexão. Foram comparados os resultados obtidos com o EC2, NBR 6118 e o ACI-318, além da reprodução do fenômeno em uma simulação numérica em elementos finitos, visando obter a distribuição do esforço cortante no perímetro crítico. São apresentadas propostas de mudanças nos valores de  $k$  do EC2 (2004) para que as previsões de capacidade resistente à punção em ligações de borda forneçam valores mais próximos aos observados experimentalmente.

### **3.1.2 Estudos numéricos sobre punção**

Em geral, as modelagens para estudos numéricos da punção são feitas usando o método dos elementos finitos. São usado três tipos de elementos para a simulação das falhas por punção, que são os elementos contínuos bidimensionais para problemas de simetria axial, elementos contínuos tridimensionais e elementos de casca (FIB, 2001).

A vantagem do uso dos elementos bidimensionais é que problemas com simetria podem ser simulados com um pequeno número de elementos, e portanto é necessário um baixo poder e tempo de processamento. No entanto, algumas situações comuns em situações práticas, como lajes com armadura longitudinal nos dois sentidos, momentos transferidos ao pilar, assim como pilares de canto e de borda não podem ser modelados com esses elementos. Entre os principais pesquisadores pode-se citar Andrä (1982), van Foeken (1983), Borst e Nauta (1985), González-Vidosa et al. (1988), Menétrey (1994) e Hallgren (1996) apud FIB (2001). A Figura 3.4 mostra a formação de fissuras em um estudo axissimétrico em comparação com o resultado de um ensaio.

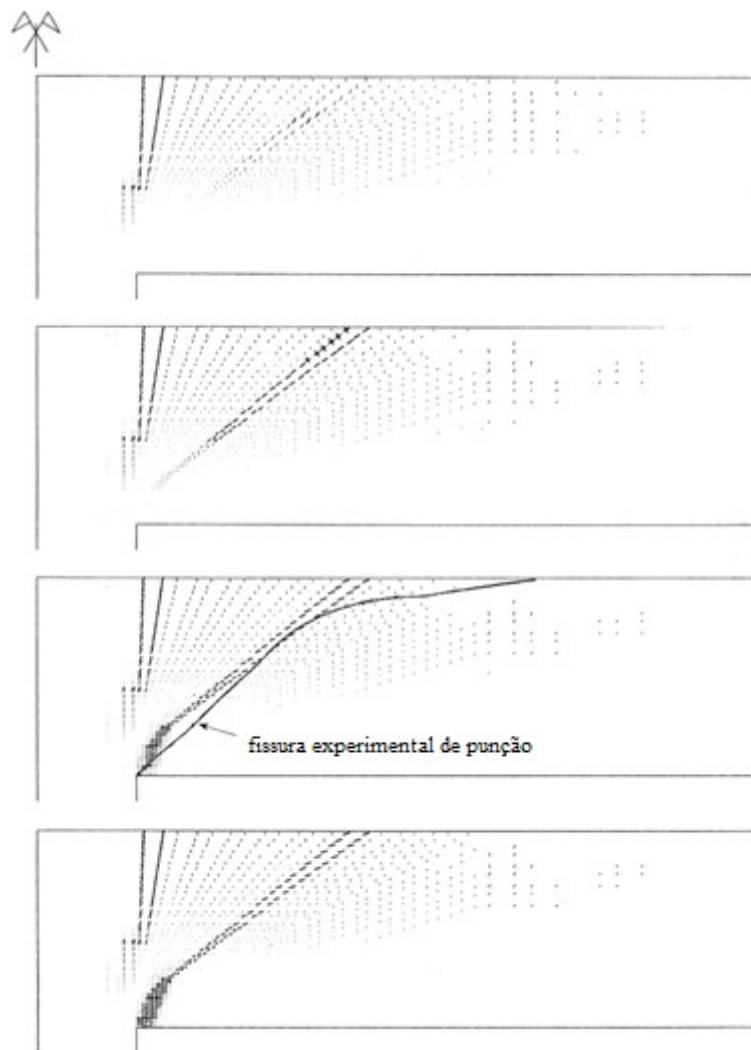


Figura 3.4 – Formação de fissuras na carga última no estudo axissimétrico de uma laje (MENÉTREY, 2002)

Já os elementos tridimensionais permitem uma grande flexibilidade e precisão na modelagem de estruturas em concreto armado e geralmente leva a resultados bastante precisos. Em contrapartida, o processamento da malha se torna mais difícil, e o tempo e poder de processamento se torna muito maior. Por conta disso, atualmente os estudos com elementos tridimensionais estão limitados à análises locais. Citam-se como principais estudos os desenvolvidos por Dyngeland et al. (1994) e Ozbolt et al. (2001). A Figura 3.5 mostra a formação da fissura inclinada na falha por punção no modelo com elementos tridimensionais e no ensaio.



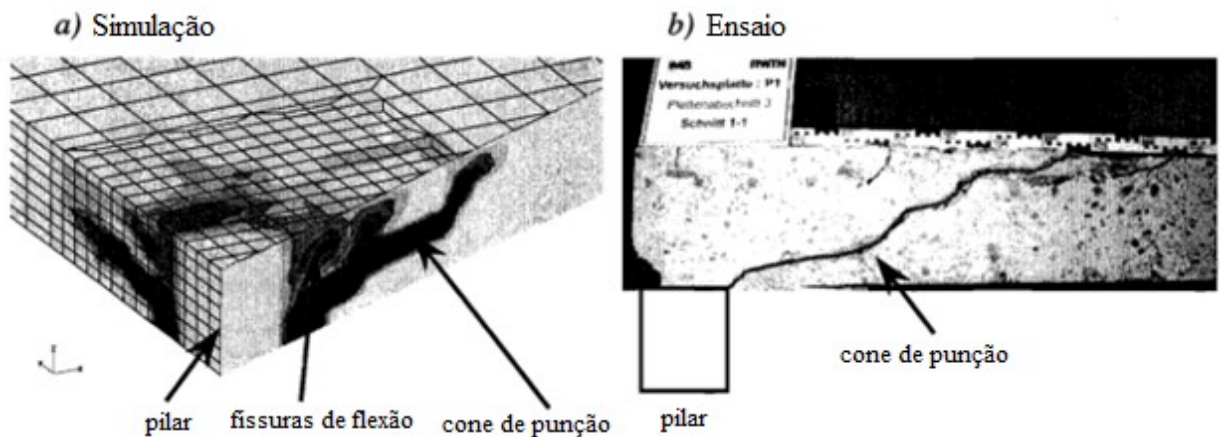


Figura 3.5 – Formação da fissura inclinada de punção no modelo numérico tridimensional e no ensaio (OZBOLT & VOCKE, 1999)

Os elementos de casca permitem a aplicação nos estudos para simulação da punção em grandes estruturas, entando mais alinhado, portanto, com problemas reais. Isto é possível devido ao relativamente pequeno número de graus de liberdade por nó de cada elemento, ao custo de resultados menos precisos quando comparados às análises com elementos contínuos. Portanto pode-se aliar uma análise aproximada, porém da estrutura completa, com um tempo de processamento aceitável. Entre os trabalhos mais relevantes, está o apresentados por Polak (1998). A Figura 3.6 apresenta diagramas do resultado das deformações em dois ensaios de referência comparados com os do modelo.

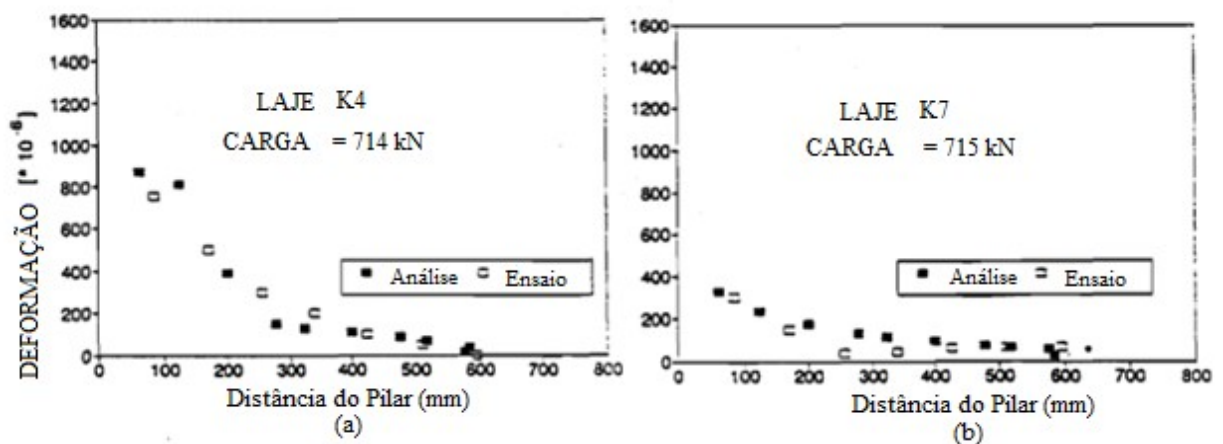


Figura 3.6 – Formação da fissura inclinada no modelo numérico tridimensional e no ensaio (POLAK, 1998)

### 3.2 Análises numéricas de esforços e tensões em lajes lisas

Neste item são apresentadas pesquisas sobre diferentes modelagens de pilarem lajes lisas, diferentes métodos de análise para obtenção de esforços em lajes lisas e também o estudo de

Bølviken (2013) sobre o estudo de tensões solicitantes de punção no perímetro crítico por modelo numérico elástico linear.

### 3.2.1 Tensões solicitantes no perímetro crítico por modelo numérico

Bølviken (2013) apresentou um estudo onde se modelou uma laje lisa por elementos finitos de modo a checar alguns parâmetros adotados pelo EC2/04. A autora estudou as tensões solicitantes no perímetro crítico a distância de  $2.d$  da face do pilar, similar ao critério da NBR 6118/14. O presente trabalho segue a metodologia apresentada por Bølviken (2013).

Para tanto a autora elaborou um modelo elástico linear com a laje engastada em todas as bordas e aplicando o carregamento diretamente no pilar, de modo a saber o momento transferido e a força de reação do pilar. Em seu trabalho, Bølviken (2013) modelou o pilar unicamente como modelo sólido. O modelo da ligação laje-pilar é apresentado na Figura 3.7.

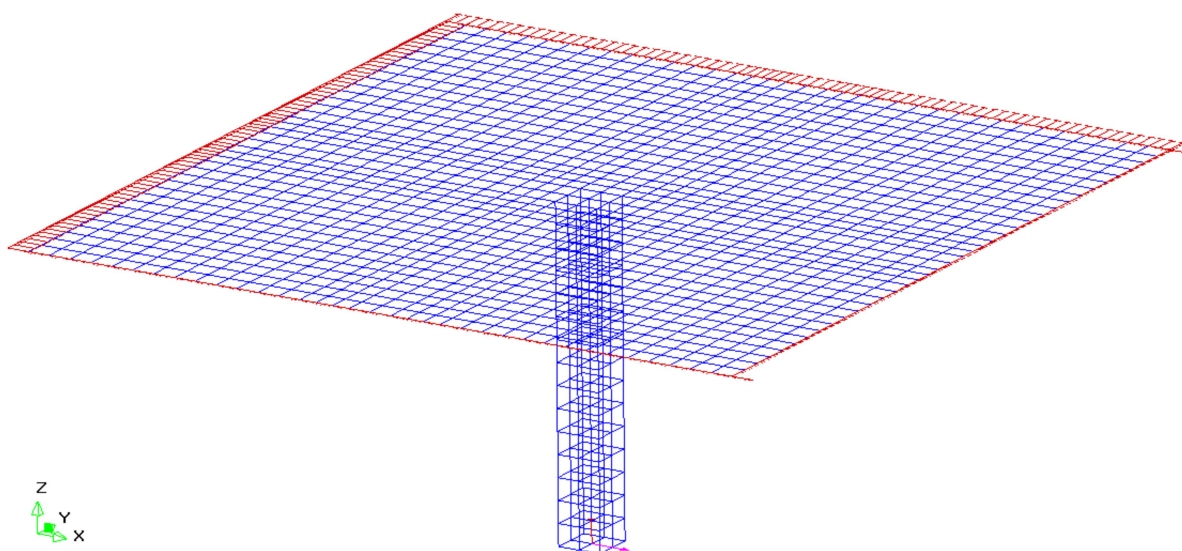
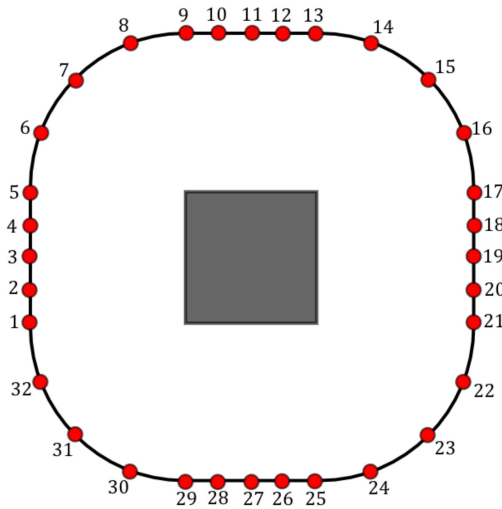


Figura 3.7 – Modelo da ligação laje-pilar para estudo das tensões no perímetro crítico (BØLVIKEN, 2013)

As análises foram feitas em função do esforço cortante por unidade de comprimento, com relação aos eixos  $x$  e  $y$ , onde se fez então a divisão destes esforços primeiro pela altura total da laje e depois pela altura útil da laje. Foram feitas medições em diversos pontos específicos do perímetro crítico, conforme Figura 3.8.



**Figura 3.8 – Pontos de medição do esforço cortante ao longo do perímetro crítico (BØLVIKEN, 2013)**

Os esforços cortantes no plano perpendicular ao eixo  $x$  foram medidos pelos valores de  $V_{xz}$ , enquanto que os esforços cortantes perpendiculares ao eixo  $y$  foram medidos por  $V_{yz}$ . Os esforços cortantes nos pontos da curvatura do perímetro crítico, como os pontos 6, 7 e 8 da Figura 3.8, foram obtidos pela seguinte equação:

$$V_{xyz} = V_{xz} \cdot \text{sen}(\varphi) + V_{yz} \cdot \text{cos}(\varphi) \quad [eq. 3.1]$$

onde:

$\varphi$  - ângulo formado pelo ponto no perímetro crítico em relação ao eixo  $x$ .

A autora fez estudos com momentos sendo o esforço predominante e também com a força de reação do pilar como sendo o esforço predominante. A Figura 3.9 apresenta os esforços cortantes  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  para um caso de pilar submetido apenas a momentos.

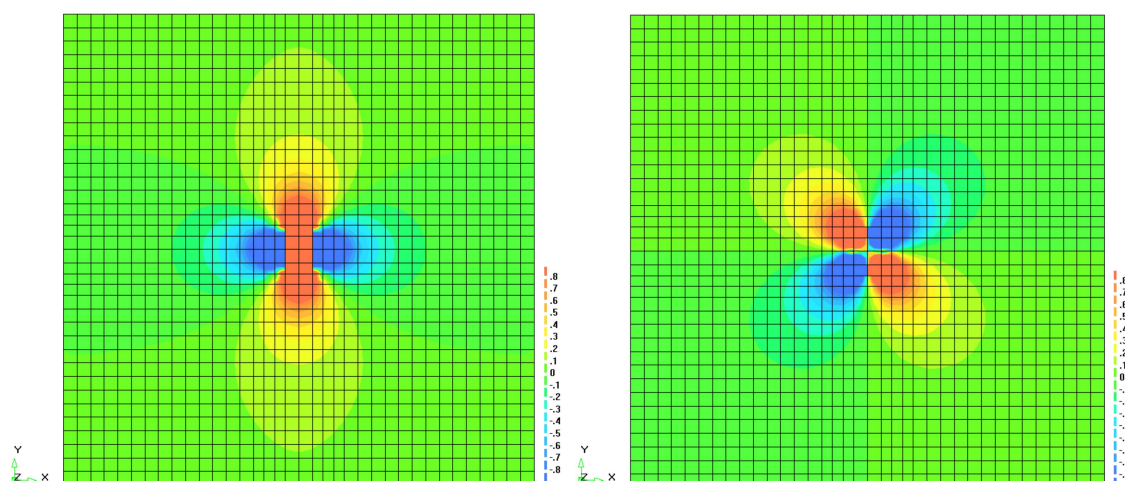


Figura 3.9 – Distribuição dos esforços cortantes para  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  respectivamente (BØLVIKEN, 2013)

Fazendo a distribuição das tensões dividindo os esforços cortantes pela altura  $h$  da laje, obtiveram-se as tensões nos pontos do perímetro crítico no modelo (Quadro 3.1).

Quadro 3.1 – Tensões de cisalhamento nos pontos sobre o perímetro crítico para laje submetida apenas a momentos (BØLVIKEN, 2013)

Pontos	Tensão solicitante - Modelo numérico : Altura $h$ ; $\cdot (10^{-3} \text{ MPa})$
3	-3,2
2, 4	-2,9
1, 5	-2,5
6, 32	-2,3
7, 31	-2,1
8, 30	-3,1
9, 29	-1,8
10, 28	-0,9
11, 27	0
12, 26	0,9
13, 25	1,8
14, 24	3,1
15, 23	2,1
16, 22	2,3
17, 21	2,5
18, 20	2,9
19	3,2

A Figura 3.10 apresenta as distribuições de tensões solicitantes no perímetro crítico idealizadas pelo EC2/04 e as obtidas no modelo numérico.

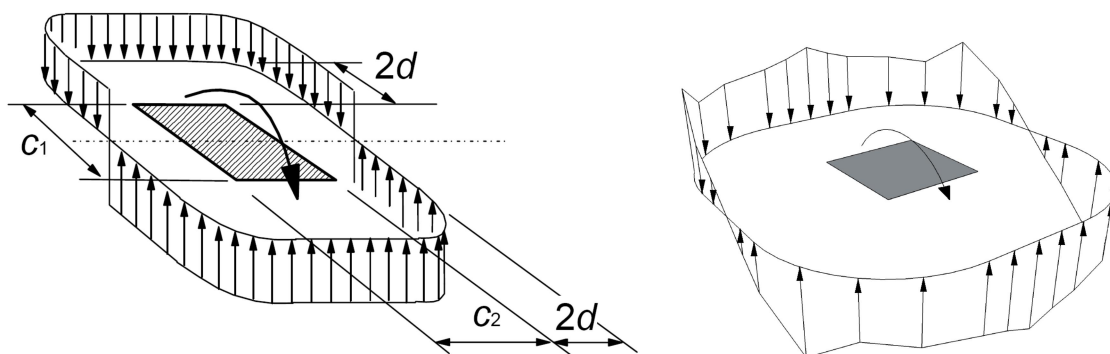


Figura 3.10 – Distribuição das tensões no perímetro crítico pelo EC2 e pelo modelo numérico (Bølviken, 2013)

No caso da laje submetida apenas a momentos, percebe-se pela Figura 3.10 que, apesar de existir certa semelhança nos dois diagramas, a tensão solicitante obtida pelo EC2/04 é um pouco conservadora em relação ao modelo numérico. Foi obtida uma tensão solicitante de  $3,5 \cdot 10^{-3}$  MPa pelo EC2/04, maior que a máxima obtida pelo modelo numérico ( $3,2 \cdot 10^{-3}$  MPa). No entanto, quando se dividiu os esforços cortantes pela altura útil da laje, a tensão máxima obtida foi igual a  $4,0 \cdot 10^{-3}$  MPa, que é maior que a calculada pelo EC2/04. No total foram efetuadas três simulações, onde o Quadro 3.2 mostra os valores das tensões solicitantes obtidas pelo EC2 são comparadas às tensões solicitantes obtidas pelo modelo numérico quando se dividem os esforços cortantes pela altura útil  $d$  e pela altura total da laje  $h$ .

Quadro 3.2 – Tensões solicitantes máximas no perímetro crítico

Simulação	Tensão solicitante EC2 /04 ( $10^{-3}$ MPa)	Tensão solicitante Modelo numérico Altura útil $d$ ( $10^{-3}$ MPa)	Tensão solicitante Modelo numérico Altura total $h$ ( $10^{-3}$ MPa)
1 (Apenas momentos)	3,5	4,0	3,2
2 (Esforço normal + momentos)	5,1	5,1	4,1
3 (Apenas esforço normal)	4,5	4,6	3,7

Os resultados de Bølviken (2013) mostraram que o Eurocode 2 tende a superestimar a tensão solicitante de punção em relação às tensões obtidas por modelos numéricos elástico lineares quando se usa a altura da laje  $h$ , independente se o esforço predominante é o momento ou a força de reação do pilar. No entanto, quando os esforços cortantes são divididos pela altura útil  $d$  da laje, os resultados tendem a ser mais próximos dos fornecidos pelo EC2 /04.

### 3.2.2 Estudos sobre modelagem de pilares em modelos numéricos

- **Simmonds (1970)**

Simmonds (1970) estudou os momentos e flechas por uma análise elástico linear de lajes lisas, onde se fez variação dos lados do pilar. O estudo consistia em analisar nove lajes pelo método dos pórticos equivalentes, por um método numérico elástico linear e compará-los com resultados obtidos de ensaios.

Segundo Simmonds (1970), a representação da geometria real da seção transversal dos pilares pode afetar muito os resultados quando se comparam os resultados obtidos em elementos finitos considerando o pilar como uma barra. Além disso, quando os pilares se tornam muito largos, próximos de pilares parede, o comportamento da laje se torna totalmente diferente de uma laje lisa diretamente apoiada em um pilar, para se aproximar de um comportamento de uma laje apoiada em uma viga. Simmonds recomenda que se deve ter um padrão em como considerar a geometria real dos pilares para obtenção dos momentos desbalanceados na modelagem de lajes lisas.

- **Hrabok & Hrudey (1983)**

Hrabok & Hrudey (1983) apresentaram um estudo para melhorar a modelagem de lajes lisas para análises lineares usando elementos finitos, como opção para solução de lajes onde o método dos pórticos equivalentes já não apresenta bons resultados, que seriam lajes com disposição irregular dos pilares. Os autores frisam que devem ser tomados cuidados com componetes da modelagem, entre eles como fazer a representação dos pilares. Para tanto, afirmar que a representação do pilar como um ponto com a rigidez do pilar não é adequada por conta do problema da singularidade, onde os momentos sobre o apoio tendem ao infinito, conforme se refina a malha do modelo. Ainda, mesmo que fosse feita sua representação por um elemento de placa, os resultados podem ter picos e ser não uniformes. Os autores citam a possibilidade de inserir restrições nos nós que estão localizados no perímetro do pilar como forma a contornar estes problemas.

- **Enochsson (2001)**

Enochsson (2001) propõe um método para contornar o problema de valores extremos dos momentos negativos sobre os pilares interno nas análises elástico lineares de lajes lisas. Segundo o autor, as análises por elementos finitos mostram que o refinamento da malha e a modelagem da rigidez do pilar influenciam os momentos negativos sobre os pilares, enquanto que os momentos positivos são praticamente independentes dos parâmetros de modelagem. O autor propõe distribuir a rigidez do pilar em um elemento de placa em diversos elementos de mola representando a rigidez do pilar. A Figura 3.11 apresenta os valores dos momentos negativos obtidos por diferentes modelagens.

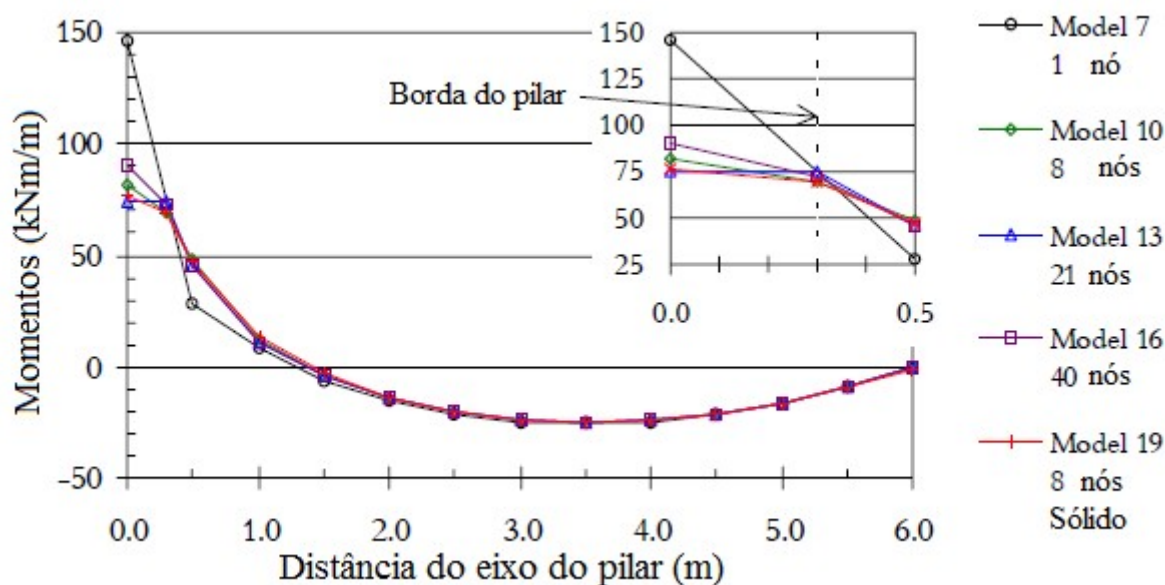


Figura 3.11 – Distribuição dos momentos (ENOECHSSON, 2001)

Pode-se observar que a partir do modelo em que há alguma preocupação com a modelagem do pilar, os resultados já são muito menores que os obtidos por um pilar modelado como apoio pontual (Model 7). Ainda assim, mesmo entre os modelos onde se considerou o pilar como elemento sólido (Model 19) e como vários elementos de mola (Model 10, 13 e 16) houve uma variação de mais de 20% no momento negativo máximo sobre o pilar.

- **Hennrichs (2003)**

Hennrichs (2003) apresentou um estudo sobre o problema da modelagem de cargas concentradas em lajes, que é também o caso da modelagem de lajes lisas apoiadas diretamente nos pilares, onde teoricamente essas cargas provocam momentos fletores que tendem ao infinito no seu ponto de aplicação.

Em seu trabalho são descritos processos teóricos e numéricos para o cálculo de lajes planas, bem como os principais fatores a serem considerados na sua modelagem. São definidas lajes de referência, na qual são modelados exemplos usando a teoria das placas, o método dos elementos finitos e o processo da analogia de grelha (Figura 3.12), sendo dada atenção especial à modelagem do pilar e da malha da laje nas suas proximidades, inclusive as dimensões do pilar e a sua influência nos resultados.



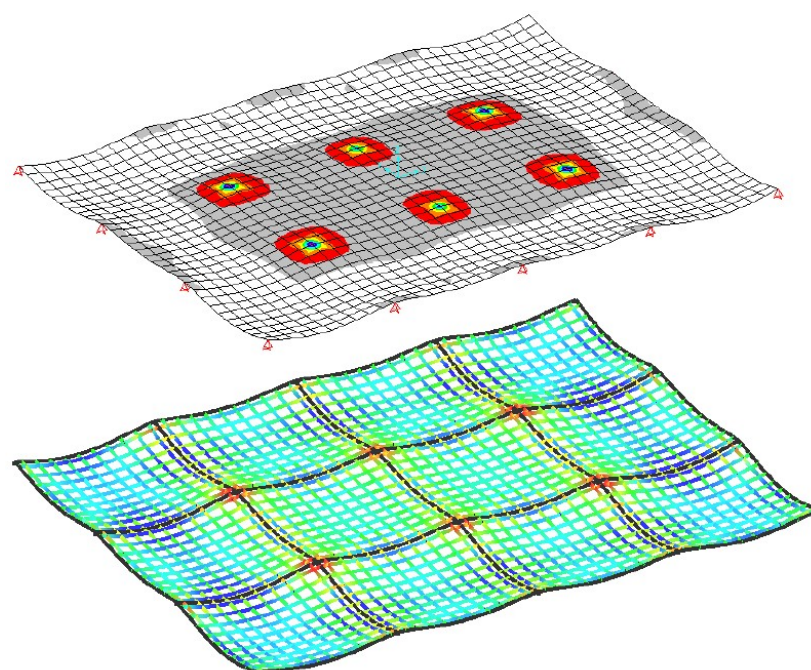


Figura 3.12 – Modelo pelo método dos elementos finitos e por analogia de grelha (HENNRICHS, 2003)

Com seu trabalho, Hennrichs pode concluir que as condições de convergência e a precisão do método dos elementos finitos depende não apenas da formulação, mas também da malha e do tipo de elemento utilizado na discretização do problema. A escolha da malha também influenciou nos resultados obtidos pela analogia de grelha.

Em situações onde o pilar foi modelado como um apoio pontual, os resultados obtidos para a carga sobre o pilar, os momentos positivos e os deslocamentos das lajes foram bastante parecidos, independente do método adotado para o cálculo.

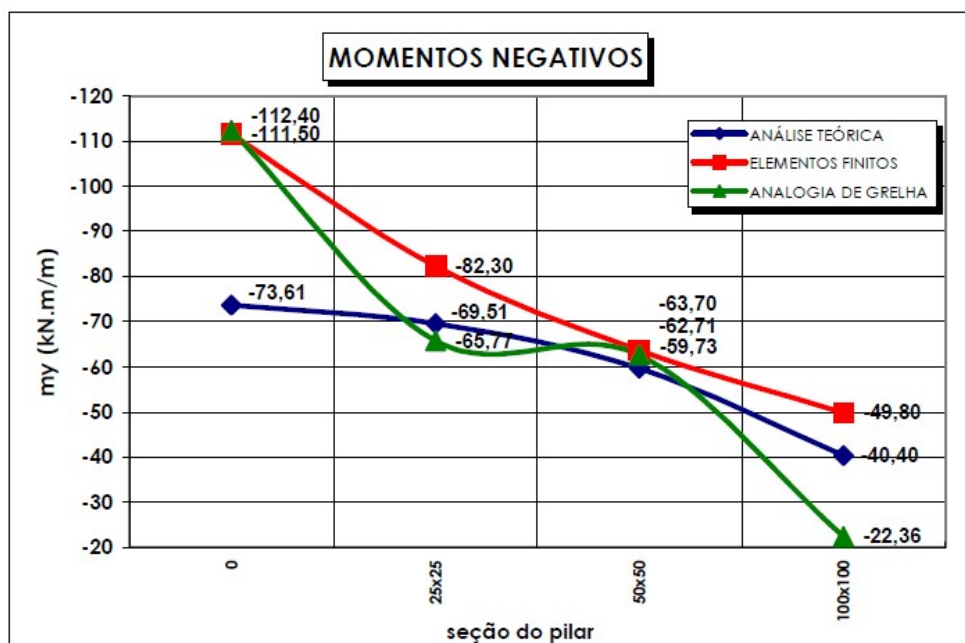


Figura 3.13 – Momentos negativos para diferentes seções de pilar (HENNRICHS, 2003)



Para a análise dos momentos negativos da laje sobre o pilar, os valores aumentam rapidamente à medida que é feito um maior refinamento da malha da laje, o que foi verificado pelos dois métodos numéricos (Figura 3.13).

Quando modelado como elemento sólido, as dimensões do pilar alteram significativamente os esforços na laje, principalmente os momentos negativos, os quais aumentam com a redução da seção do pilar. Mesmo com o pilar modelado como um sólido, ocorreu concentrações de tensões nos seus cantos, além de ter elevado significativamente o tempo de processamento.

As análises por analogia de grelha apresentaram resultados parecidos dos obtidos por elementos finitos, com exceção dos momentos negativos, pelo fato da consideração de vigas de rigidez, as quais criaram uma faixa mais rígida da laje nas suas proximidades, alterando um pouco os valores dos esforços.

- **Rashed (2004)**

Rashed (2004) apresenta uma solução para o problema dos momentos negativos sobre pilares internos em lajes lisas com o uso de elementos de contorno considerando as deformações por cisalhamento. Nos pontos de apoio, Rashed considerou as dimensões reais dos pilares, onde os momentos fletores em relação a x e y e a reação na direção z são constantes sobre a seção do pilar.

As Figura 3.14 e 3.15 ilustram dois exemplos onde são feitas comparações dos momentos negativos sobre o pilar obtidos por elementos finitos e os obtidos pela sua solução por elementos de contorno (MEC) para diferentes tamanhos de pilares. A Figura 3.14 apresenta diagramas de momentos negativos em função da variação da proporção dos lados do pilar interno.

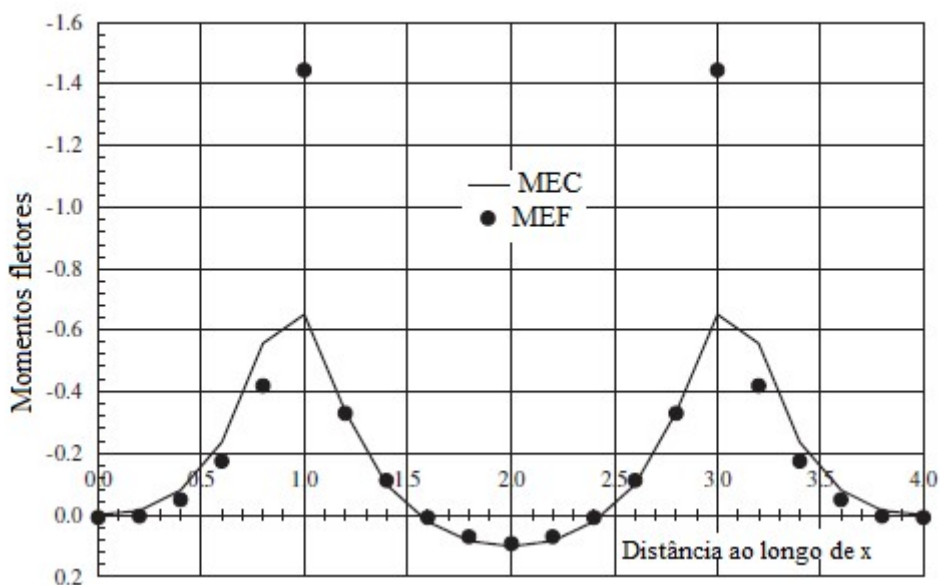


Figura 3.14 – Momentos fletores ao longo de um corte para um pilar quadrado de lado 40cm (RASHED, 2004)

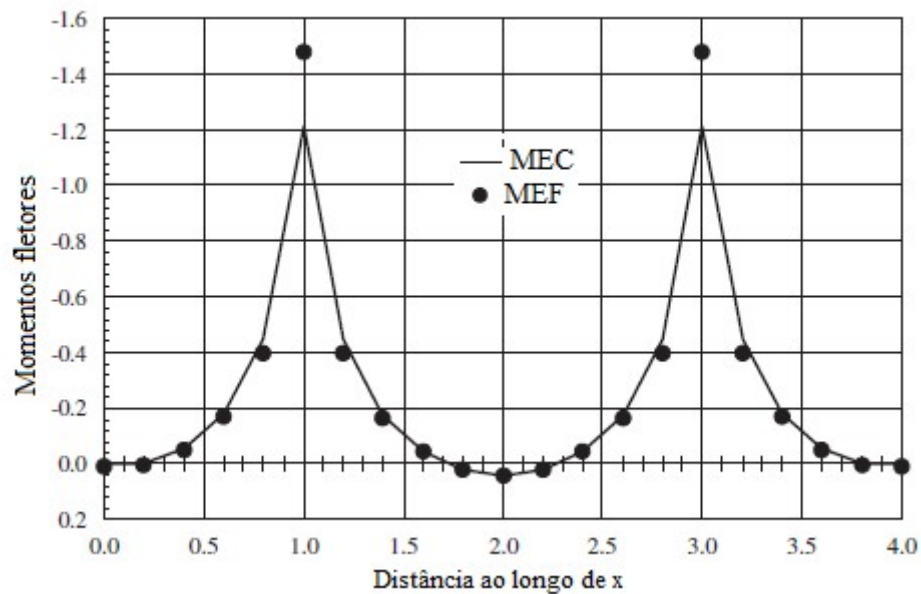


Figura 3.15 – Momentos fletores ao longo de um corte para um pilar quadrado de lado 10cm (RASHED, 2004)

Percebe-se que a modelagem por elementos de contorno proposta por Rashed elimina o problema da singularidade. A Figura 3.16 apresenta um estudo do efeito da retangularidade de um pilar interno, mantendo um dos lados com 5cm e variando o outro lado do pilar. Os momentos transferidos ao pilar são visualizados nos dois métodos, e enquanto o momento fornecido por um apoio pontual no método dos elementos finitos, a formulação de elementos de contorno proposta por Rashed reduz esse momento.

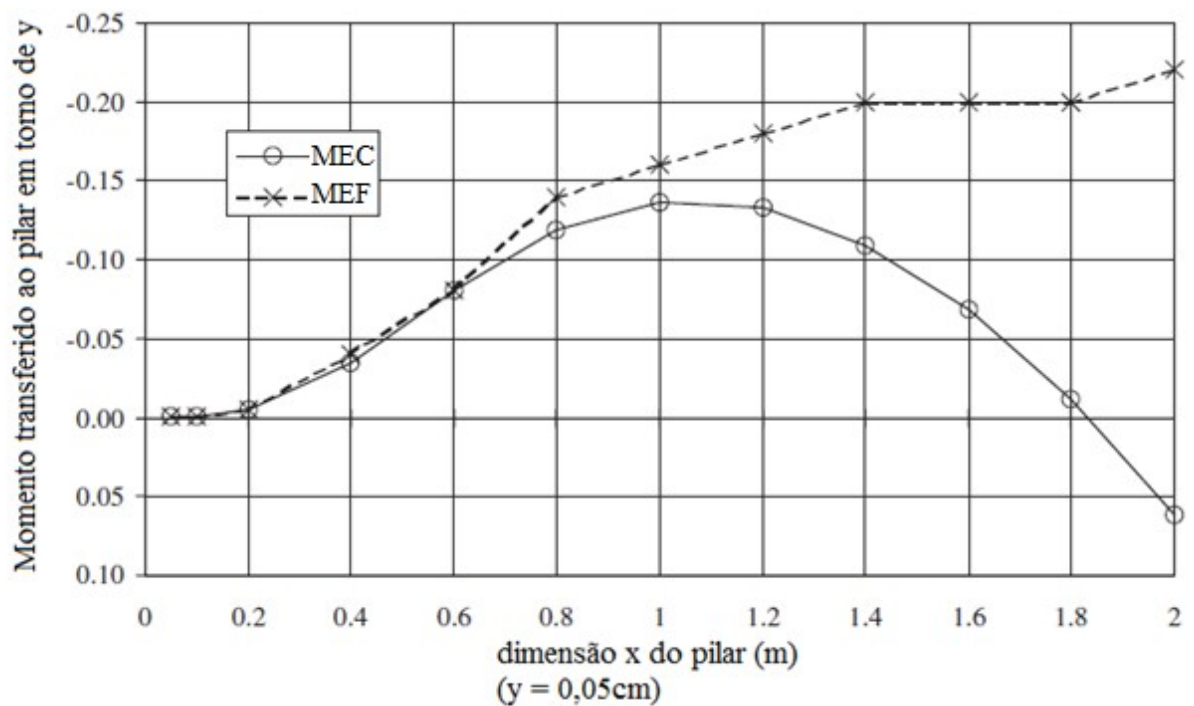


Figura 3.16 – Variação dos momentos transferidos ao pilar em função da relação entre os lados do pilar (RASHED, 2004)

- **Rombach (2004)**

Em seu livro, Rombach (2004) diz que a maioria dos erros ocorre na fase de idealização de uma estrutura real, na fase de modelagem da estrutura, e esta deve ser feita com critério adequado, uma vez que pode influenciar bastante os resultados. A Figura 3.17 destaca algumas soluções para a modelagem de pilares internos em lajes lisas.

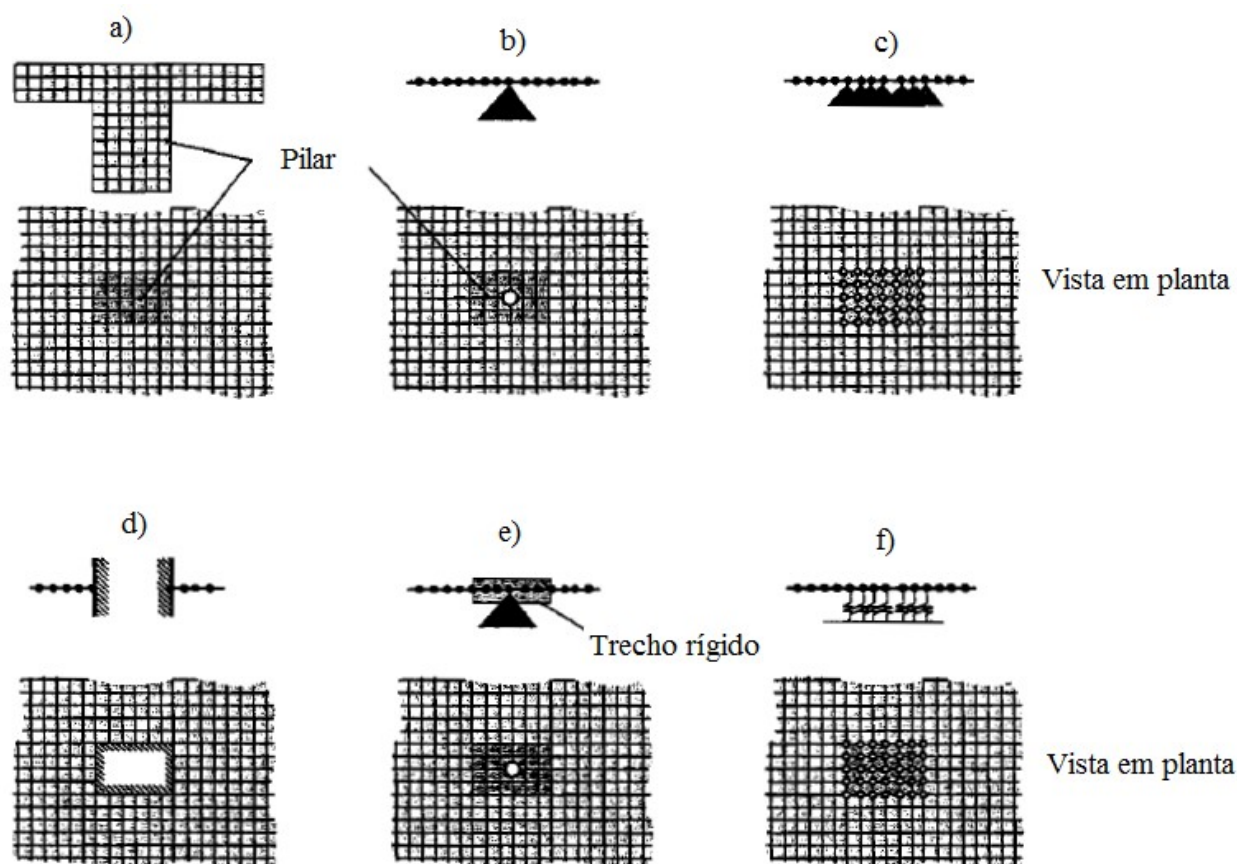


Figura 3.17 – Modelos de pilares internos em lajes lisas (ROMBACH, 2004)

Na Figura 3.17 são exibidas seis soluções, nomeadas de *a)* a *f)*. A solução *a)* apresenta um modelo integrado sólido, o qual, segundo Rombach, conduz a bons resultados, mas mostra picos de tensão nas arestas dos pilares, além de demandar um maior tempo para elaborar e analisar o modelo em relação a outras soluções. A solução *b)* exibe uma solução por apoio pontual. Esta seria a forma mais comum de ser idealizada, porém é a que conduz a resultados menos precisos. Essa solução conduz a pontos de singularidade e os momentos fletores tenderão ao infinito quanto mais refinada for a malha. A solução *c)* mostra diversos apoios pontuais ao longo da área da seção transversal do pilar, a qual conduz a momentos elevados nas faces dos apoios e não é adequado para representar pilares flexíveis. A solução *d)* proposta por Rombach sugere inserir apoios do 3º gênero nas faces do pilar, o que conduz a momentos elevados nas faces dos apoios e também não é adequado para pilares flexíveis. A solução *e)* proposta por Rombach, e adaptada para este trabalho, é enrijecer a região da seção transversal do pilar, permitindo a rotação do pilar. Essa solução é indicada para pilares flexíveis. A solução *f)*, também adaptada neste trabalho, sugere a adoção de apoios elásticos na projeção da área da seção transversal do pilar.

- **Pedrozo (2008)**

Pedrozo (2008) estudou procedimentos para dimensionamento de lajes lisas protendidas no estado limite de serviço para pavimentos com e sem balanços, comparando os resultados obtidos pelo processo do pórtico equivalente e pelo método dos elementos finitos através do programa computacional SAP 2000.

Nos modelos numéricos Pedrozo fez um estudo da influência da modelagem dos apoios nos momentos fletores. Chegou a uma solução onde se utilizou de um carregamento equivalente à reação do pilar, uniformemente distribuído, na região dos apoios, que forneceram resultados satisfatórios para análise dos pavimentos (Figura 3.18).

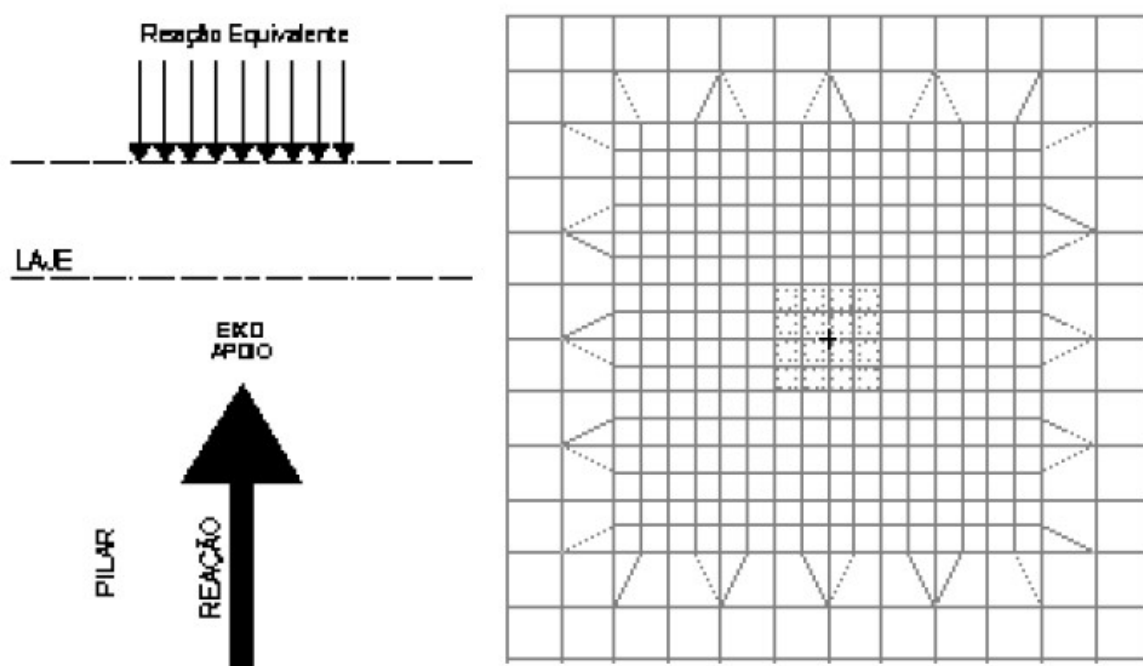


Figura 3.18 – Carregamento distribuído equivalente (PEDROZO, 2008)

Através dos estudos realizados, Pedrozo (2008) afirma que o método dos pórticos equivalentes não consegue representar satisfatoriamente o comportamento em serviço da laje. Portanto, para o estudo dos Estados Limites de Serviço seria necessário um modelo numérico mais apropriado principalmente na região dos apoios, onde existem elevadas concentrações de tensões.

- **Puel (2009)**

Puel (2009) estudou a modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas, apresentando alternativas para o problema da singularidade ocorrido quando se modela a laje considerando os pilares como apoio pontual. São avaliados os momentos fletores na laje plana e os esforços (esforço normal e momento fletor) no pilar que gera punção na laje, com uma análise linear.

Puel propõe um modelo que distribui a reação do pilar na laje, que consiste em analisar, primeiramente, o modelo com apoio pontual e, então, transformar o momento fletor e o esforço normal do pilar em um carregamento distribuído, para então adicioná-los na laje como carregamento no sentido contrário à ação das cargas gravitacionais, onde se estudou casos simétricos e

assimétricos do pilar em relação à laje. Em cada caso foram elaborados modelos considerando o pilar como apoio pontual, como reação distribuída na laje, como reação distribuída na laje na região da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje, com e sem simular a região enrijecida do pilar. Cada modelo foi analisado no programa SAP 2000 utilizando o Método dos Elementos Finitos e o Processo por Analogia de Grelha, além do software AltoQi Eberick V5 Gold, o qual utiliza o processo por Analogia de Grelha para analisar as lajes.

Puel pode perceber que o refinamento da malha influencia diretamente na qualidade dos momentos negativos, quando se modela o pilar como apoio pontual. Os momentos positivos e as reações dos pilares não sofrem influência significativa quando se fez a análise pelos diferentes métodos e modelos. Na Figura 3.19 todos os modelos consideram o pilar enrijecido, onde o caso 4.1 considera apoio pontual, 4.2 pilar considerando uma reação na laje e 4.3 uma reação projetada a 45° no centro de gravidade da laje.

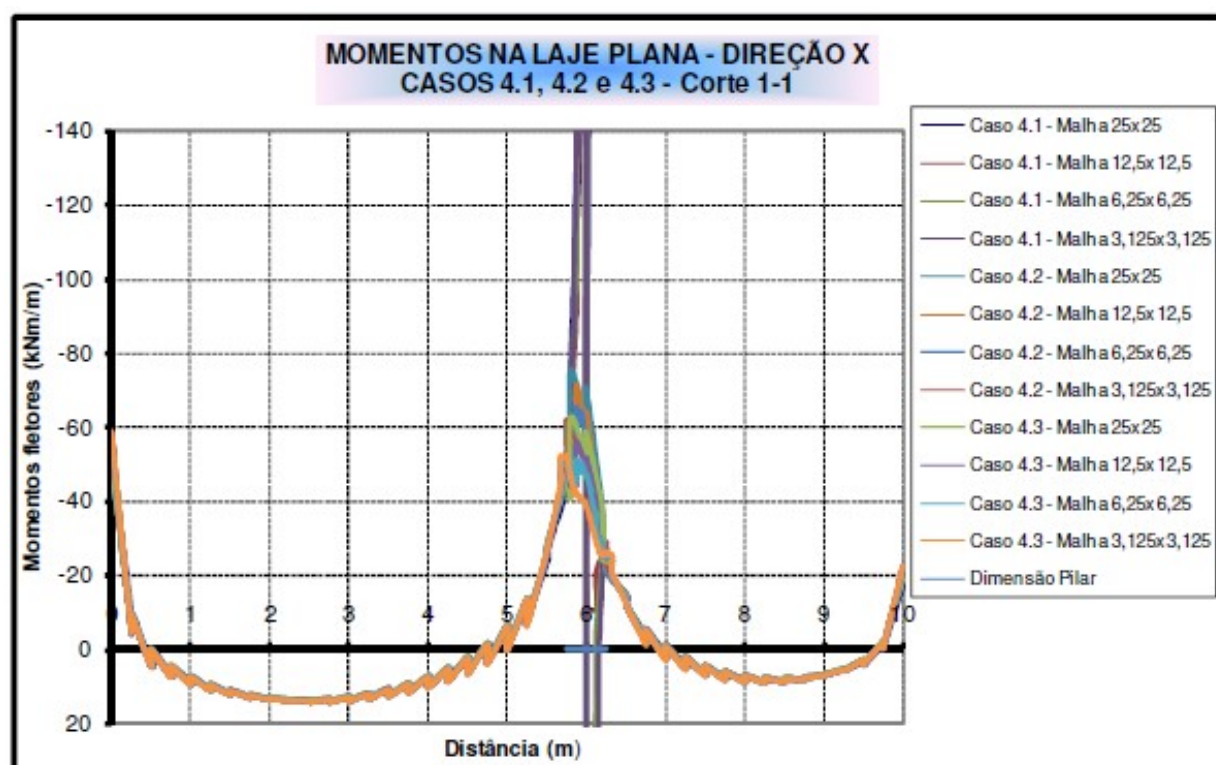


Figura 3.19 – Momentos fletores na laje por analogia de grelha (PUEL, 2009)

Com relação aos momentos fletores transferidos ao pilar, quando se modelou o pilar como apoio pontual e não se considera a região do pilar rígida, ambos os métodos forneceram resultados tanto menores quanto mais refinada era a malha na região do pilar. Quando se usava a reação do pilar em uma determinada área como carregamento na laje e não usando elementos rígidos, o momento fletor no pilar foi pouco sensível à malha em ambas as análises e, numericamente, muito superior ao valor obtido no caso do apoio pontual (Figura 3.20). Os casos 3 representam os mesmos modelos dos casos 4.*i*, com exceção da consideração do enrijecimento do pilar.



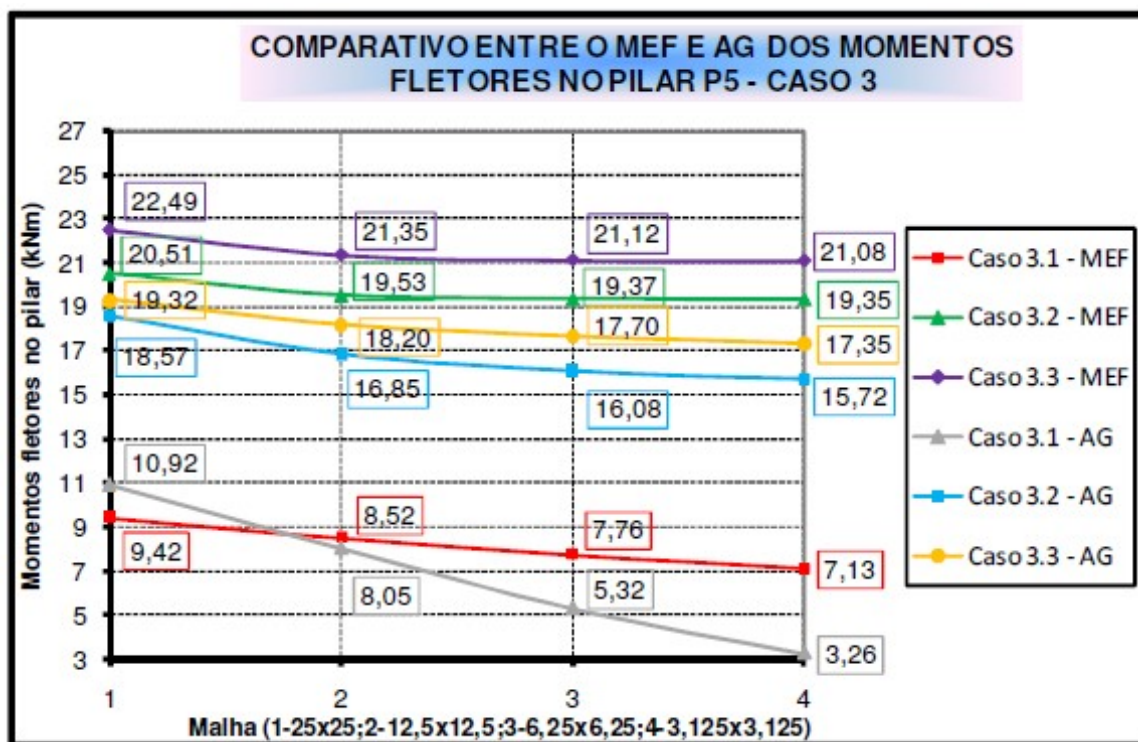


Figura 3.20 – Momentos fletores transferidos ao pilar (PUEL, 2009)

Quando se enrijeceu a região do pilar, em todos os casos os momentos transferidos ao pilar foram próximos uns dos outros. Os elementos rígidos no pilar levaram a um aumento da rigidez na região de ligação, onde até onde se considerou o pilar como apoio pontual foram obtidos bons resultados.

- **Silva (2013)**

Silva (2013) apresentou um estudo do comportamento das lajes lisas apoiadas em pilares dispostos irregularmente usando o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos pórticos equivalentes (MPE), procurando estabelecer um termo de comparação entre métodos e verificar se era possível a sua aplicação em lajes deste tipo. A Figura 3.21 compara os momentos fletores obtidos em uma das simulações. Percebe-se que o MPE tendeu a fornecer momentos fletores negativos maiores que o MEF, enquanto que os momentos positivos não apresentaram grandes diferenças.

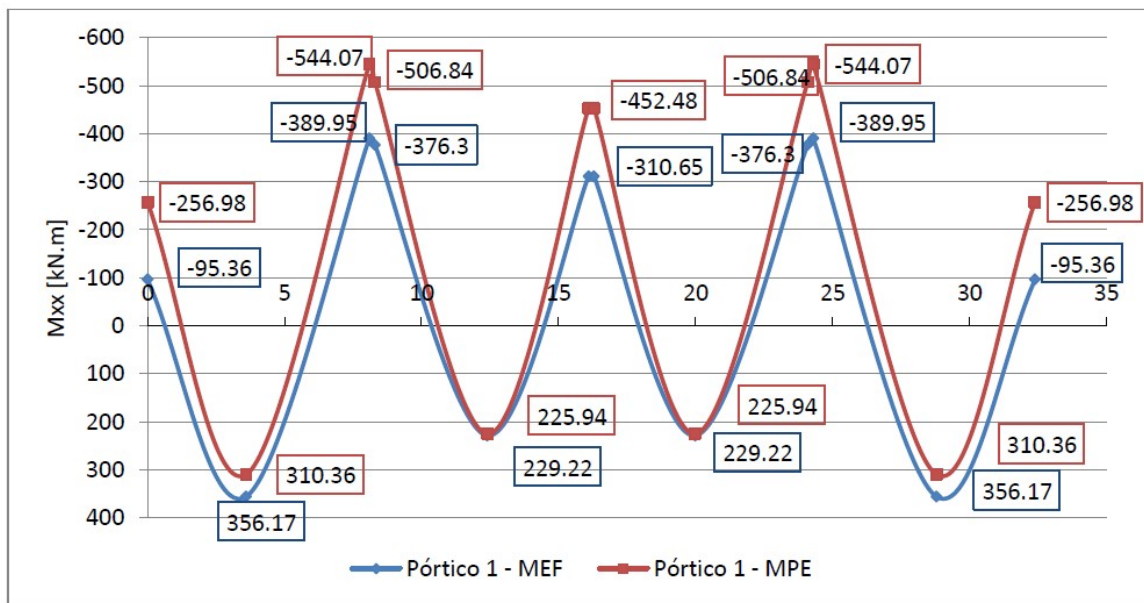


Figura 3.21 – Comparativo de diagramas de momentos fletores para o pórtico 1 (Silva, 2013)

Segundo Silva (2013), o principal problema encontrado na modelagem da laje foi a ligação laje pilar. A modelagem inicialmente foi realizada por elementos barra com uma rigidez equivalente às características dos pilares (apoio pontual), sendo que esta ligação era realizada num só nó da malha, chamado por Silva de "Caso 1". Em ligações com essa modelagem dos pilares, Silva (2013) observou que os momentos negativos sobre os pilares atingiam valores de pico elevadíssimos. Silva (2013) então propôs a adoção de duas modelagens diferentes (Casos 2 e 3), usando pilar como elemento sólido e como 4 barras modeladas com a rigidez equivalente à seção que representa do pilar. As duas modelagens são adotadas no presente trabalho (Figura 3.22).

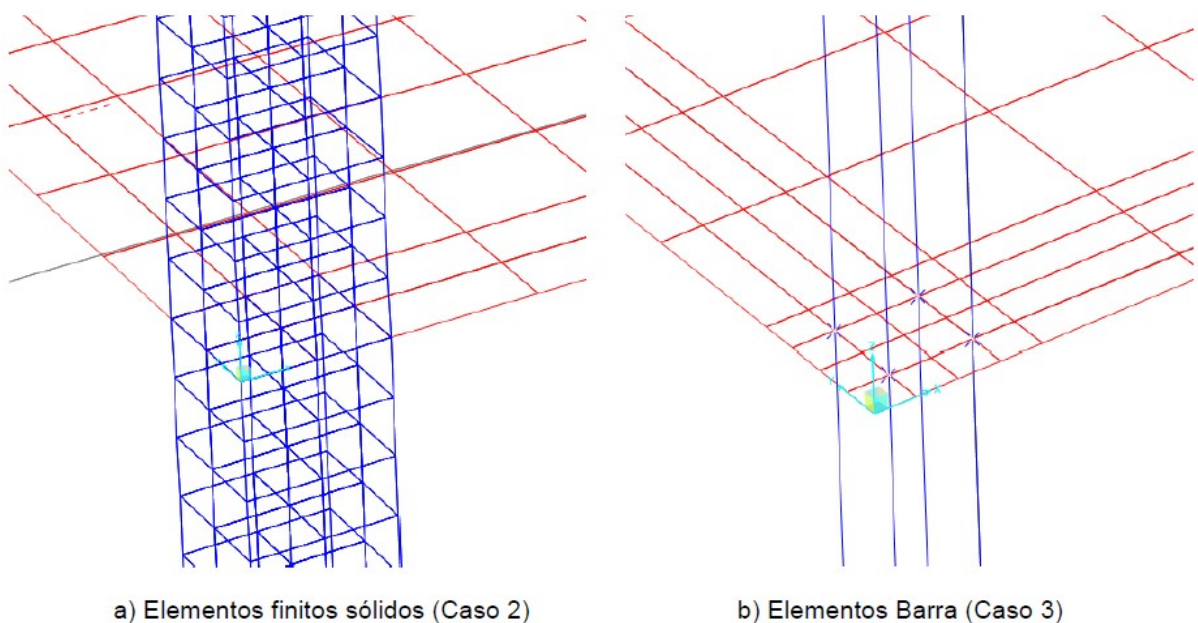


Figura 3.22 – Tipos de modelagem estudados por Silva (2013)

Segundo Silva (2013), analisando o comportamento e os resultados obtidos pelo MEF em paralelo com os resultados obtidos pelo MPE, foi possível estabelecer a possibilidade da aplicação do MPE em lajes irregulares num ambiente de projeto.

- **Skorpen & Dekker (2014)**

Skorpen & Dekker (2014) comparam métodos tradicionais de análise de lajes lisas obtidos da norma Sul Africana SANS 10100 /2000 (SD - *Standard Analysis*), o método dos elementos finitos e resultados obtidos em ensaios. A modelagem dos pilares internos foi feita conforme as sugestões de Rombash (2004), e os valores dos momentos negativos sobre o pilar podem ser observados na Figura 3.23

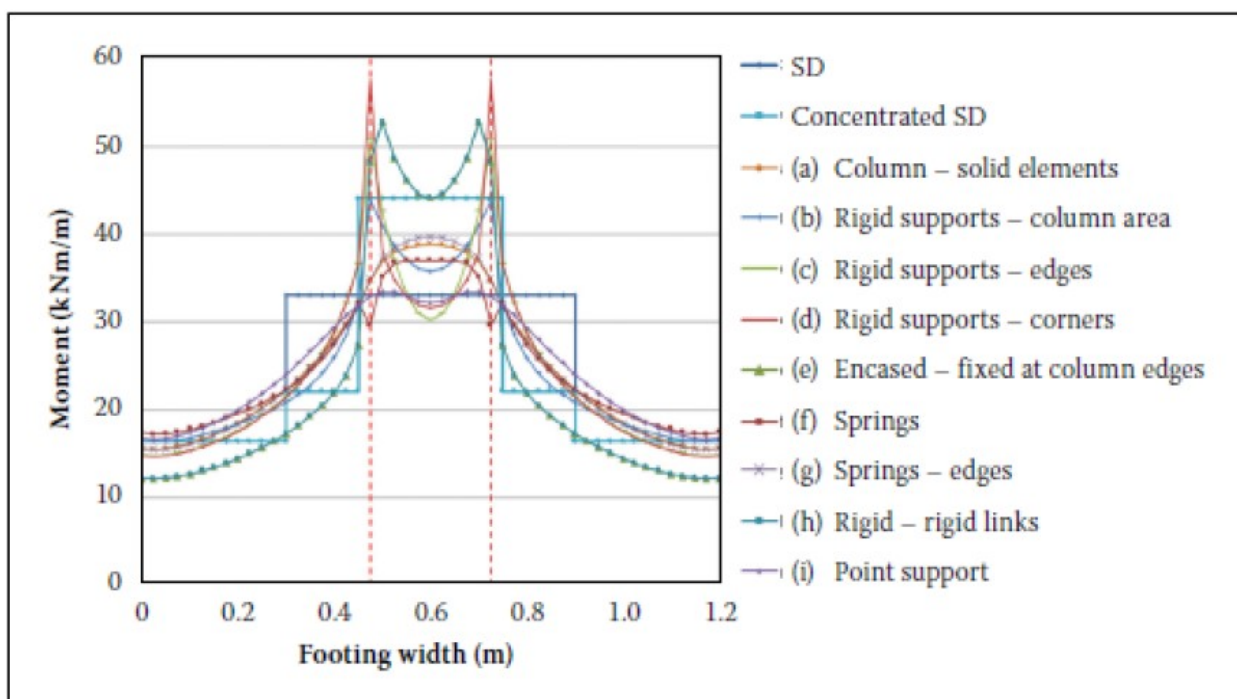


Figura 3.23 – Momentos fletores sobre o pilar segundo diferentes modelagens (SKORPEN & DEKER, 2014)

Observa-se que os momentos fletores obtidos entre as prescrições da norma SANS 10100 2000, resultados experimentais e modelo numérico foram muito próximos. Com relação ao modelo numérico em Elementos Finitos, os casos onde se considerou o pilar como elemento sólido (caso *a*) e onde se representou o pilar como apoios com molas em suas bordas (caso *g*) foram os que obtiveram os menores picos de esforços.

### 3.2.3 Estudos sobre diferentes métodos de análise de lajes lisas

- **Sherif & Dilger (2000)**

Um estudo feito por Sherif & Dilger (2000), em que foi feita a comparação dos resultados dos momentos fletores pelo método dos pórticos equivalentes do ACI, o método dos elementos finitos e ensaios em lajes em tamanho real, constatou-se que o método dos pórticos equivalentes proposto pelo ACI e o método dos elementos finitos dão resultados próximos aos obtidos em



ensaios para pequenas assimetrias nos carregamentos, ao passo que o método dos pórticos equivalentes tende a superestimar os momentos desbalanceados quando o carregamento começa a aumentar, como mostra a Figura 3.24.

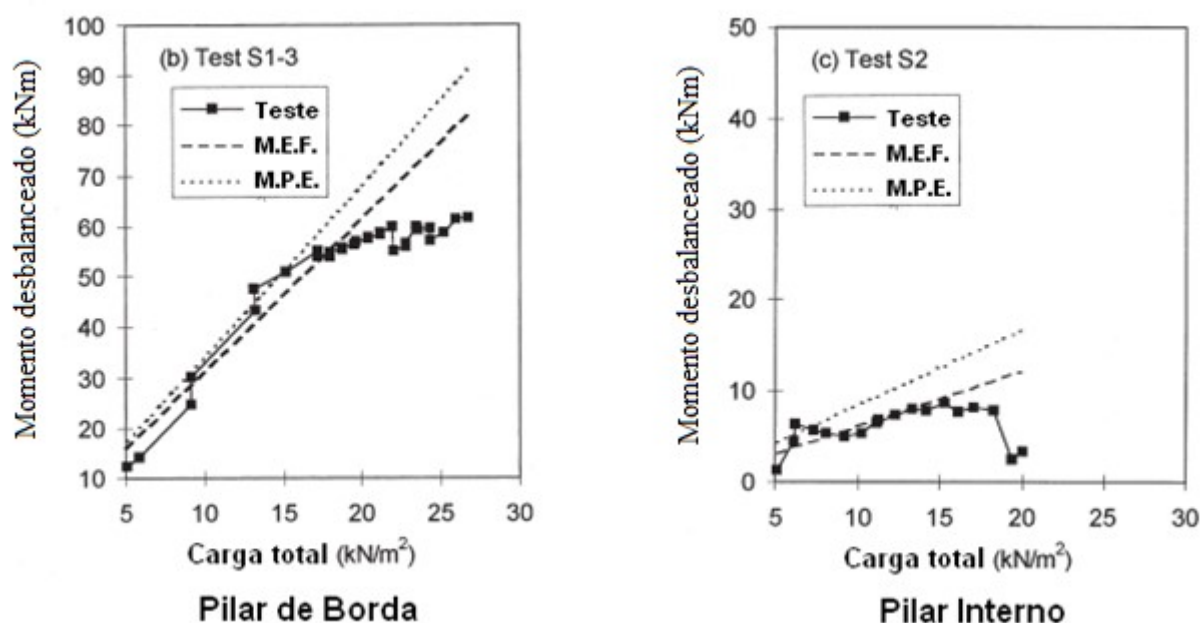


Figura 3.24 – Diagrama momento x carregamento pelos métodos dos pórticos equivalentes do ACI, dos elementos finitos e ensaio em laje em tamanho real (SHERIF & DILGER, 2000)

- Faria (2004)

Faria (2004) apresentou um comparativo dos resultados obtidos para duas configurações de lajes lisas protendidas analisadas pelo Método dos Pórticos Equivalentes (MPE) e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Os dois tipos de lajes lisas modeladas foram uma com pilares dispostos ortogonalmente em com vãos pouco diferentes (exemplo 1) e outra com pilares dispostos irregularmente, exibida na Figura 3.25 (exemplo 2).

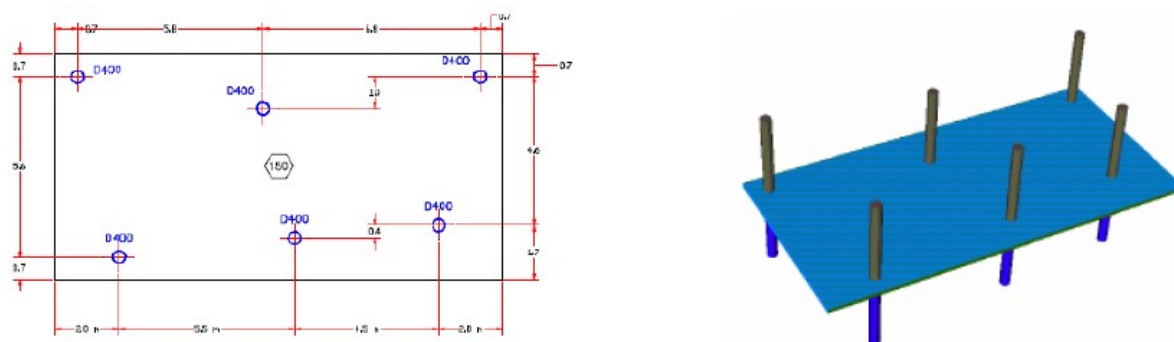


Figura 3.25 – Laje do exemplo 2 com pilares dispostos irregularmente (FARIA, 2004)

Os resultados mostraram que a laje lisa do exemplo 1, os valores dos esforços e deslocamentos obtidos pelo MPE foram próximos dos obtidos pelo MEF. Para a laje lisa do

exemplo 2, os momentos fletores obtidos pelos dois métodos foram significativamente diferentes, resultando em flechas e taxas de armaduras diferentes.

- **Bueno (2008)**

Em seu trabalho, Bueno (2008) faz uma revisão histórica sobre a análise de lajes, apresentando um comparativo entre diferentes métodos de análise. Uma laje retangular contínua composta de dois painéis apoiada em vigas é modelada e analisada pelo método dos elementos finitos, processo de analogia de grelha e o método da ruptura por tabelas.

Em seus cálculos, Bueno observou que os momentos positivos da laje tiveram variação menor entre os métodos em relação aos momentos negativos obtidos por cada método. O autor enfatiza a maior flexibilidade e bons resultados do método dos elementos finitos e o processo de analogia de grelha.

### **3.2.4 Estudos de confiabilidade com incertezas de modelo**

- **Maes (1991)**

Maes (1991) apresenta um estudo sobre a influência do desconhecimento em se obter a resposta de uma estrutura dentro das possibilidades de se considerar as incertezas de modelo, o qual denomina fator de ignorância  $b^*$ , pois afirma que as incertezas de modelo têm um grande impacto nas especificações de norma para projeto. As incertezas de modelo aqui definidas neste artigo têm um sentido amplo, onde podem significar quão bem calibrada uma equação é em relação a dados experimentais, e também quão bem um modelo estrutural prevê o comportamento de uma estrutura, onde o fator de ignorância representaria o último.

O autor estuda qual deveria ser a parcela da incerteza de modelo em razão do fator de ignorância considerada nos coeficiente de segurança das normas, uma vez que modelos mais elaborados e complexos deveriam reduzir as variabilidades nas respostas das estruturas, e portanto deveria-se permitir uma maior flexibilidade quando se reduz o chamado fator de ignorância.

Portanto Maes (1991) propõe um procedimento de calibração dos coeficientes de segurança em função de dois parâmetros de projeto. O primeiro diz respeito aos efeitos das variabilidades provocadas por incertezas de carregamentos e resistências. O segundo consiste no fator de ignorância, que é ajustado com relação à variável incerteza de modelo. A Figura 3.26 exemplifica um diagrama do fator de ignorância, que destaca uma relação praticamente linear positiva com o quadrado da variável incerteza de modelo.

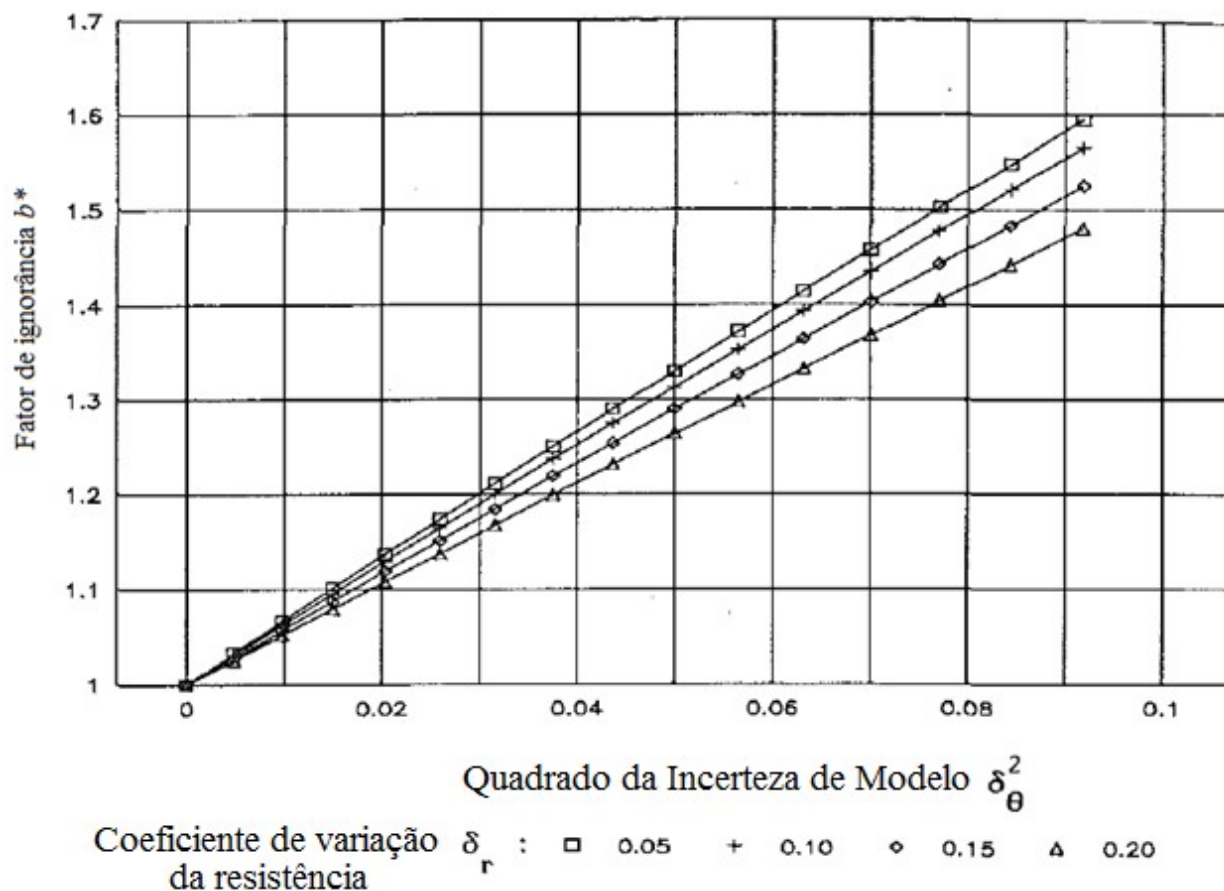


Figura 3.26 – Fator de ignorância  $b^*$  em função da variável Incerteza de modelo (MAES, 1991)

Segundo o autor essa abordagem segue os princípios da análise por estados limites, uma vez que os fatores de segurança devem levar em conta a variabilidade dos carregamentos, bem como as imprecisões nas análises dos efeitos dos carregamentos nas estruturas. O autor conclui que simplesmente separando o fator de ignorância da variável incerteza de modelo, obtém-se um formato muito mais flexível para projeto, uma vez que modelos mais precisos poderiam ter dimensionamentos mais econômicos.

- **Stewart (1992)**

Em seu trabalho, Stewart (1992) ajusta a ocorrência de falhas de projeto por erros humanos à distribuições de probabilidade, o que segundo o autor é responsável por uma significativa parcela de falhas estruturais. Para tanto, Stewart (1992) propõe entender o comportamento de 94 engenheiros quando estes são submetidos a 25 pequenas tarefas comuns nos cálculos de análise e dimensionamento de estruturas, de tal modo que se possa estimar, dentro destas tarefas, qual a ocorrência de erros humanos na fase de projeto.

Os dados são então ajustados à modelos matemáticos para uso no que o autor define como Análise de Confiabilidade Humana (HRA). Estes modelos são usados para fornecer informações sobre a frequência da ocorrência de erros humanos. O Quadro 3.3 informa a frequência dos erros encontrados nas 25 tarefas cumpridas pelos 94 engenheiros calculistas.

Os dados foram ajustados segundo os modelos binomial, beta-binomial e binomial p-dependente para definir a variável aleatória HRA.

**Quadro 3.3 – Dados dos erros encontrados nas tarefas (STEWART, 1992)**

Ocorrência de erros	Número de engenheiros	Número de erros	Número de Tarefas	Frequencia Média de erro
0	68	0	1683	-
1	18	18	445	-
2	5	10	125	-
3	2	6	50	-
4	1	4	24	-
<b>Total</b>	94	38	2327	0,01633

Fez-se então um estudo de confiabilidade usando simulação de Monte Carlo, comparando os modelos de erros humanos HRA com dados de ocorrência de erros em cálculos estruturais reais, obtidos de pesquisas anteriores do mesmo autor (Tabel 3.4) para a análise e dimensionamento de uma estrutura metálica composta de vigas de perfil I. Observou-se que os modelos obtidos da simulação de apenas 25 simples tarefas com 94 engenheiros tendeu a superestimar a probabilidade de falha em 20% a 30%.

**Quadro 3.4 – Probabilidades de falha (STEWART, 1992)**

Variável Incerteza de erro humano	Modelo de distribuição		
	Binomial	Beta-binomial	Binomial p-dependente
<b>HRA</b>	4,14 e-05	5,95 e-05	8,04 e-05
<b>Dados reais</b>	3,26 e-05	4,14 e-05	6,87 e-05

- **Melchers (2007)**

Em seu trabalho, Melchers (2007) analisa a segurança das estruturas de uma maneira bastante abrangente, com uma abordagem qualitativa de confiabilidade, onde analisa diversos fatores que acarretariam direta e indiretamente as falhas estruturais, incluído o porquê da ocorrência destas. O autor afirma que o isolamento do cálculo estrutural de uma visão social externa é prática comum, e talvez essa dissonância possa influenciar na segurança das estruturas. Portanto existiriam diversos problemas que carecem de esclarecimentos, incluindo o quão bem os cálculos probabilísticos estruturais se relacionam com as observações de falhas em estruturais reais.

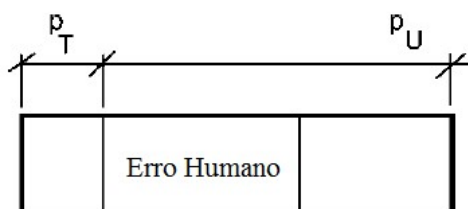
O autor divide a interpretação das incertezas no cálculo estrutural em erros técnicos, que, segundo o autor é contemplada pelos coeficientes de segurança fornecidos pelas normas, e os erros relacionados a erros de projeto, construção e operação. Assim, o autor propõe a adoção de um

conjunto de medidas teóricas claramente definidas adaptadas para a segurança no cálculo estrutural.

O Quadro 3.5 apresenta a proposta de Melchers (2007) na abrangência e classificação da variabilidade encontradas na confiabilidade estrutural. A probabilidade de falha de uma estrutura seria dada pela soma das probabilidades de falhas técnicas ( $p_T$ ) com falhas não técnicas ( $p_U$ ). A Figura 3.27 ilustra uma possível distribuição das probabilidades de falha.

**Quadro 3.5 – Fatores que influenciam a segurança da estrutura (MELCHERS, 2007)**

Erros técnicos	Erros não técnicos	
	Erros humanos	Erros por Intervenção do meio
Carregamentos	Ignorância do sistema correto	Educação
Propriedades dos materiais	Negligência	Ambiente de trabalho
Propriedades das seções dos materiais	Enganos	Simplificação da complexidade
Comportamento do sistema global	Subestimação de comportamentos	Seleção de pessoal
Comportamento nos nós e ligações	Materiais incomuns	Re-análise própria
Comportamento solo-estrutura	Sistema construtivo incomum	Re-análise por terceiros
Modelo da resposta estrutural	Organização inapropriada	Manutenção
Modelo do comportamento do material	Carregamentos ilegais	Inspeção
Parâmetros da análise probabilística	Pressão financeira ou política	Sistemas "a prova de falha"



**Figura 3.27 – Proporção dos fatores que contribuem com a probabilidade de falha (MELCHERS, 2007)**

Segundo o autor, para que as medidas de segurança e resiliência nas estruturas sejam mais exigidas e aceitas pela sociedade em geral, elas devem se tornar parte de uma perspectiva mais abrangente de risco e segurança, compatíveis com procedimentos já usados por outras indústrias (considerando a estrutura como parte da indústria da construção) que oferecem potencial risco à sociedade.

- **Bulleit (2008)**

Bulleit (2008) aborda as incertezas que envolvem os projetos estruturais e as soluções desenvolvidas para contornar os problemas provocados por essas incertezas. O autor classifica as incertezas em duas categorias: das incertezas de natureza aleatória, que está relacionada com "sorte", e de natureza epistêmica, relacionadas ao conhecimento. Essa divisão teria impacto em como são tratados os diversos tipos de incertezas. Bulleit (2008) examina as causas das variabilidades, onde destaca cinco delas, sendo o tempo, limites da análise estatística, limites dos modelos de análise e dimensionamento, aleatoriedade dos dados e erros humanos. O autor enfatiza a importância em se melhorar o entendimento de engenheiros estruturais acerca das incertezas e suas implicações.

Quanto às incertezas de modelo, Bulleit (2008) as classifica em duas categorias: quanto às incertezas relacionadas em quão bem uma equação prevê resultados experimentais; quanto às incertezas relacionadas a quão bem um modelo estrutural, modelo de elementos finitos por exemplo, prevê o comportamento da estrutura. Segundo Bulleit (2008), a primeira classificação permite a incorporação direta de coeficientes de segurança, através da adoção de variáveis aleatórias de erro de modelo. Portanto, havendo dados suficientes, pode-se ajustar alguma curva de probabilidades e efetuar uma análise de confiabilidade. A segunda classificação é uma função de quão bem um engenheiro calculista modela a estrutura, que é influenciado por quão bem o engenheiro conhece a técnica de modelagem, quanto tempo e empenho o engenheiro tem disponível para modelar a estrutura adequadamente e quão importante é determinado elemento para que se use um modelo refinado.

Com relação aos erros humanos, o autor menciona o colapso da ponte Tacoma Narrows. Segundo o autor, o colapso da ponte pode ser interpretado de diversas maneiras, como por incerteza do modelo, como erro humano ou como problema de heurística, enquanto ele próprio diz ter sido uma combinação dos três fatores, dada a inter-relação em condições de projeto. O desconhecimento da real segurança que as estruturas já construídas possuem, faz com que a impressão de que todas possuem segurança satisfatória pode afetar futuros projetos estruturais. Grande parte dos erros humanos podem ser corrigidos ainda na fase de projeto, mas conforme as normas evoluem, elas se tornam mais precisas e complexas, o que pode reduzir as incertezas referentes a variabilidades de carregamentos e resistências, mas devido ao aumento na complexidade do seu uso, pode aumentar as incertezas relacionadas a variabilidades de modelo e erros humanos. As normas estariam, portanto, trocando uma incerteza aleatória por outra epistêmica, sem necessariamente estar reduzindo a incerteza total.

- **Santos (2012)**

O estudo feito por Santos (2012) aborda uma análise estatística da variável aleatória erro de modelo ( $E_M$ ) para a previsão de capacidade resistente de vigas e pilares segundo as normas NBR 6118/07 e o ACI 318/02. A variável  $E_M$  neste estudo segue a primeira classificação de Bulleit (2008) e é obtida pela razão entre observações de valores experimentais (os valores experimentais de resistência dos pilares de concreto armado foram obtidos de uma base de dados levantada pela autora) e os valores obtidos pelas prescrições normativas. A autora realizou testes de aderência para adequar curvas de distribuição de probabilidades para as variáveis erro de modelo para futuros estudos de confiabilidade (Figura 3.28). Também foram realizadas regressões lineares para avaliar a correlação de diversos fatores no erro de modelo, entre eles a resistência média a compressão do concreto, taxa de armadura longitudinal (Figura 3.29), taxa de armadura transversal, índice de esbeltez dos pilares, altura útil e domínios de ruína das vigas, deformação dos elementos de concreto e aço. Os pilares foram analisados levando em conta carregamentos centrados e excêntricos.

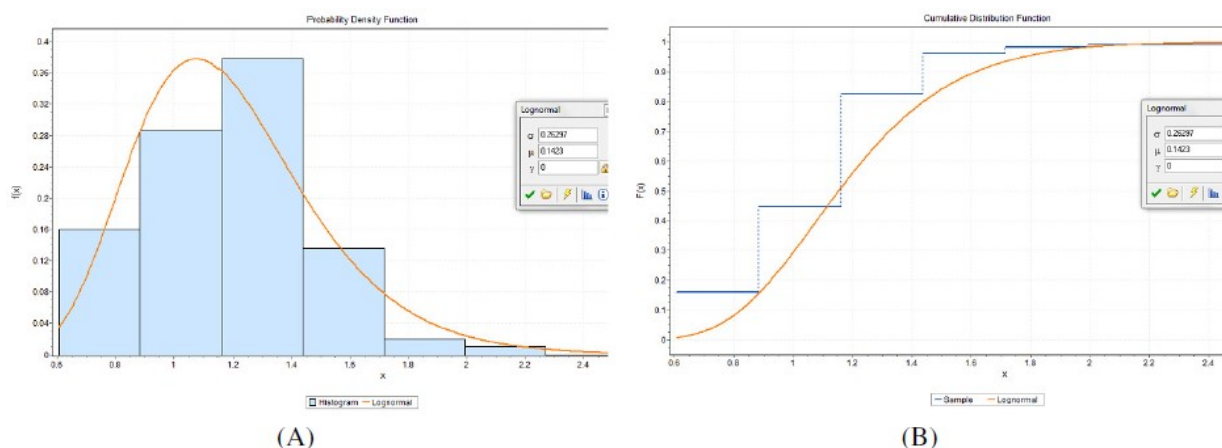


Figura 3.28 – Variável erro de modelo NBR 6118/07 para pilares com rigidez aproximada - (A) Distribuição de densidade de probabilidade, (B) Distribuição acumulada de probabilidade (SANTOS, 2012)

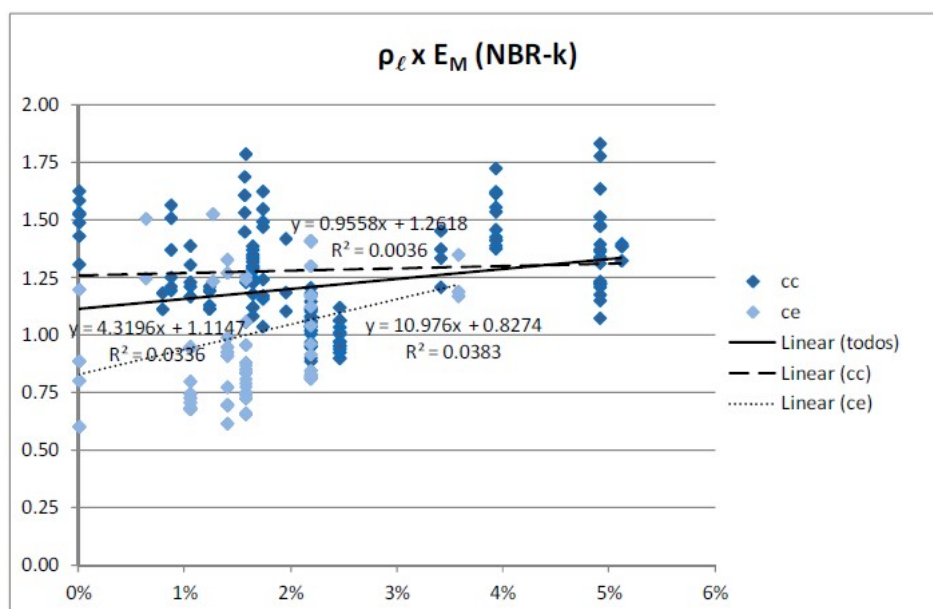


Figura 3.29 – Relação entre erro de modelo e a variável taxa de armadura longitudinal dos pilares pelo modelo da rigidez aproximada da NBR 6118/ 07 (SANTOS, 2012)

Na análise de regressão linear das vigas, o erro do modelo obtido pela NBR 6118/07 para previsão do momento resistente último não foi conclusivo, embora tenha apresentado dependência da taxa de armadura longitudinal e da posição da linha neutra no estado limite último.

Entre as análises do erro de modelo dos pilares solicitados à compressão excêntrica dimensionados pela NBR 6118/07, observou-se que a variável erro de modelo possui tendência à correlação positiva, tornando o modelo mais conservador para maiores resistências de concreto, enquanto que pilares solicitados axialmente, o modelo se mostra com tendência à uma correlação negativa com o aumento de resistência. Portanto, os modelos da norma brasileira não podem ser extrapolados para concreto de alta resistência pois não conseguem mensurar a capacidade resistente total. Já a taxa de armadura longitudinal apresenta tendência à correlação positiva com o erro de modelo.

- **Nowak & Racokzy (2013)**

Nowak & Racokzy (2013) realizaram um estudo sobre fatores que influenciam nas incertezas ao longo do processo da construção civil. Os autores apresentam coeficientes de variabilidades para carregamentos de peso próprio e carregamentos acidentais, tanto para edifícios como para pontes. Para a resistência, as incertezas devem ser consideradas como uma combinação das variabilidades do material, da fabricação e mão de obra, onde os autores também apresentam coeficientes de variabilidades para aço estrutural, concreto armado e protendido.

A parcela de incertezas provocadas pelo "homem" são mais difíceis de quantificar, segundo os autores, uma vez que devem ser incluídos também erros humanos. Essas incertezas incluem ações devidas ao fogo, colisões de veículos, mudança de finalidade da edificação, carregamentos acima dos previstos, má manutenção, métodos aproximados de análise e erros humanos. Segundo Nowak e Rocokzy (2013), 90% das falhas estruturais são devidas a erros humanos, com 50% dos erros na fase de projeto e 50% na fase de construção. Os erros humanos são divididos em erro conceitual, erro intencional e erro de execução. São sugeridas duas maneiras de contornar os erros, por redução da sua ocorrência e por mitigação das consequências. A redução de ocorrência pode se dar por procedimentos de checagem, inspeções, considerações psicológicas, projetos "a prova de falha", entre outros. A mitigação das consequências requer a identificação dos componentes, ligações ou procedimentos mais sensíveis no processo de desenvolvimento de uma estrutura, ajustando sua segurança adequadamente, o que poderia ser feito por uma análise de sensibilidade.

Os autores apresentam um exemplo simples de análise de sensibilidade de uma viga simplesmente apoiada, projetada para suportar uma carga uniformemente distribuída ao longo de seu vão. São adotados três coeficientes de variação para a resistência do material, 10,5% (aço), 6,5% (concreto protendido) e 22,5% (madeira). Para o carregamento são considerados coeficientes de variação de 8%, 12% e 15%. Para cada combinação de material e coeficiente de variação, as vigas são dimensionadas de tal maneira que o coeficiente de confiabilidade  $\beta$  seja igual a 3,5. O erro humano é considerado na forma de se reduzir o carregamento distribuído em porções reduzidas de comprimento até atingir a forma de uma carga pontual com mesma intensidade. A porção da área efetivamente carregada e o vão total da viga é denotada por  $\alpha$ , que pode assumir valores de 1 a 0. Os resultados obtidos para cada um dos materiais é observado nas Figura 3.30 a 3.32

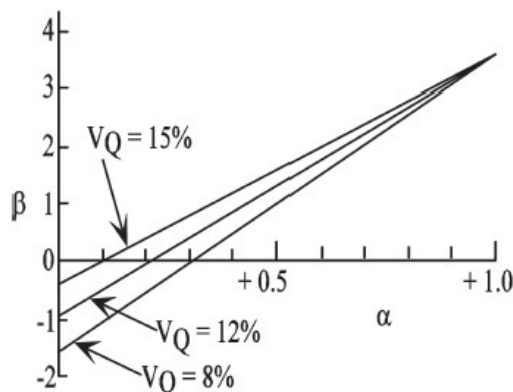


Figura 3.30 – Análise de sensibilidade da viga metálica (NOWAK & RACOKZY, 2013)



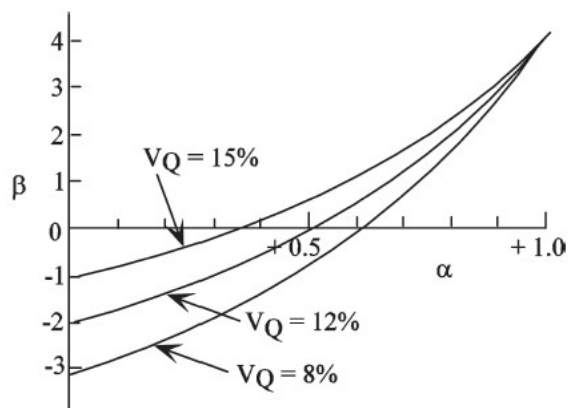


Figura 3.31 – Análise de sensibilidade da viga de concreto protendido (NOWAK & RACOKZY, 2013)

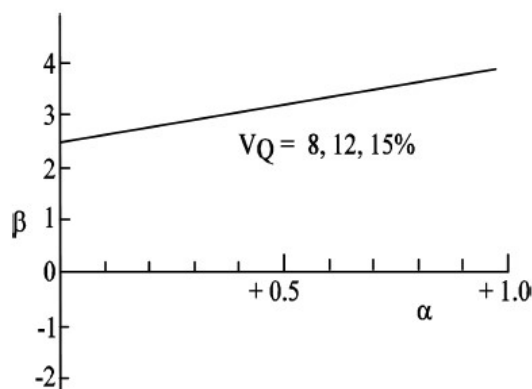


Figura 3.32 – Análise de sensibilidade da viga de madeira (NOWAK & RACOKZY, 2013)

Percebe-se que o índice de confiabilidade em função do erro humano é influenciado pelo material e, no caso do aço e principalmente do concreto, pode ter um impacto enorme na segurança da estrutura. Apesar do exemplo parecer simples, segundo os autores, o colapso de uma ponte em Mineápolis em 2007, o qual matou 13 pessoas, e feriu outras 145, ocorreu por fato similar, onde se considerou erro humano na fase de projeto.

- **Fröderberg & Thelandersson (2015)**

Fröderberg & Thelandersson (2015) apresentam um estudo sobre o efeito das incertezas provocadas por análises e dimensionamentos de uma mesma estrutura efetuadas por 16 engenheiros calculistas. Todos os participantes eram engenheiros experientes com grau de mestre, que trabalhavam em escritórios de médio a grande porte, e com uma média de 12 anos de experiência. O estudo baseava-se em fornecer desenhos e informações típicas para a elaboração de um projeto estrutural, analisando as diferenças nos resultados obtidos pelos participantes. Entre as tarefas, eles deveriam verificar a dimensão já fornecida de alguns elementos estruturais, dimensionar pilares do pavimento térreo, fornecer os esforços solicitantes dos pilares parede e calcular as cargas das fundações. O projeto do edifício em concreto armado possuía 5 andares e aproximadamente 3000m<sup>2</sup> de área coberta.

Os 16 participantes apresentaram resultados consideravelmente diferentes para as tarefas propostas. Ao comparar a carga de projeto de cada pilar do pavimento térreo, por exemplo, a carga

do pilar na posição B3 variava entre 601 kN e 1619 kN, na posição C3 entre 690 kN e 1556 kN e na posição D3 variava entre 393 kN e 1350 kN. Estes valores são apresentados na Figura 3.33 para cada um dos 16 participantes. O coeficiente de variação varia de 19% para a posição C3 a 35% para a D3. Ao resumir os valores de carga para a posição B3, C3 e D3, chegou-se a uma estimativa da carga total considerada por cada engenheiro calculista. Este valor exibe um resultado mais consistente, mas ainda com um coeficiente de variação igual a 21%. Isto indicou que as diferenças na distribuição da carga entre os diferentes pilares são uma importante fonte de variabilidade global.

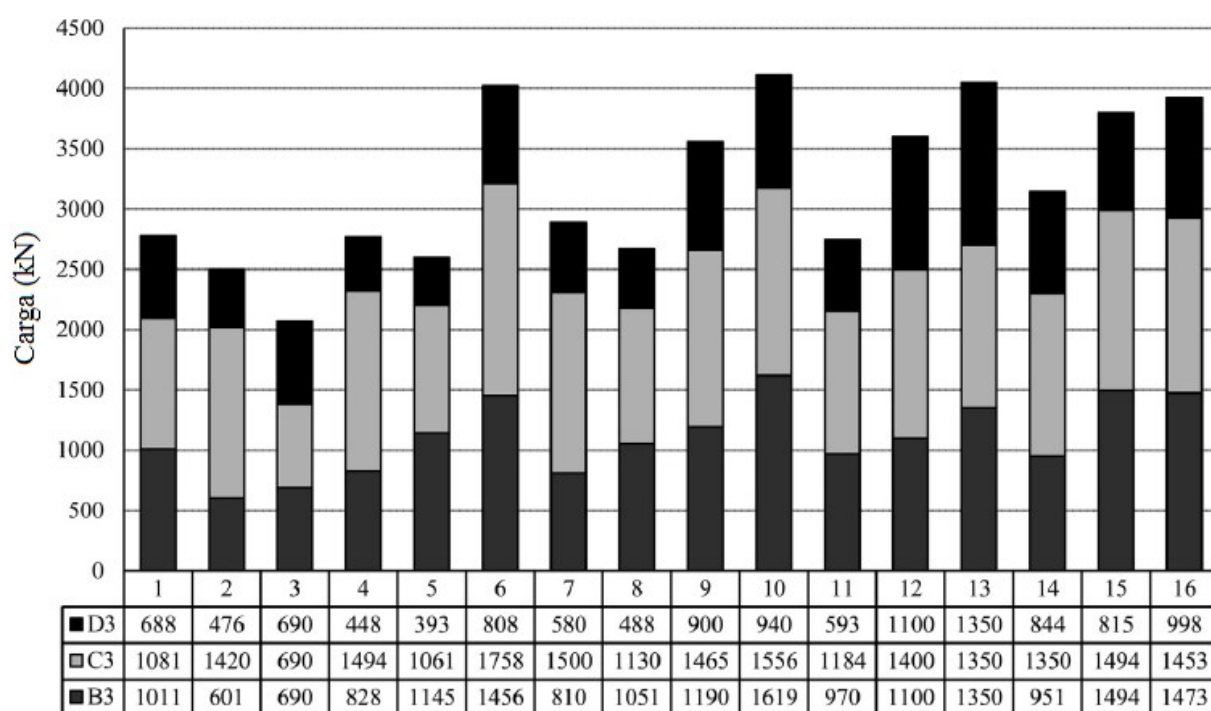


Figura 3.33 – Cargas nos pilares obtidas por cada participante (FRÖDERBERG&THELANDERSSON, 2015)

Ao comparar os momentos totais nos pilares parede, os autores indicam que aparentemente não há nenhuma conexão nos resultados apresentados pelos 16 participantes. Para o pilar parede na posição GL1 por exemplo, o momento variava com um fator maior que 40 (entre 99 e 4150 kNm), enquanto que para o pilar parede na posição GL6, o fator era de quase 70 (entre 124 e 8300 kNm). Isto é ilustrado na Figura 3.34, e embora pareçam variações inaceitáveis, os autores explicam ser valores factíveis, dependendo de como o calculista considera e modela as iterações dos esforços dos elementos estruturais na estrutura global.

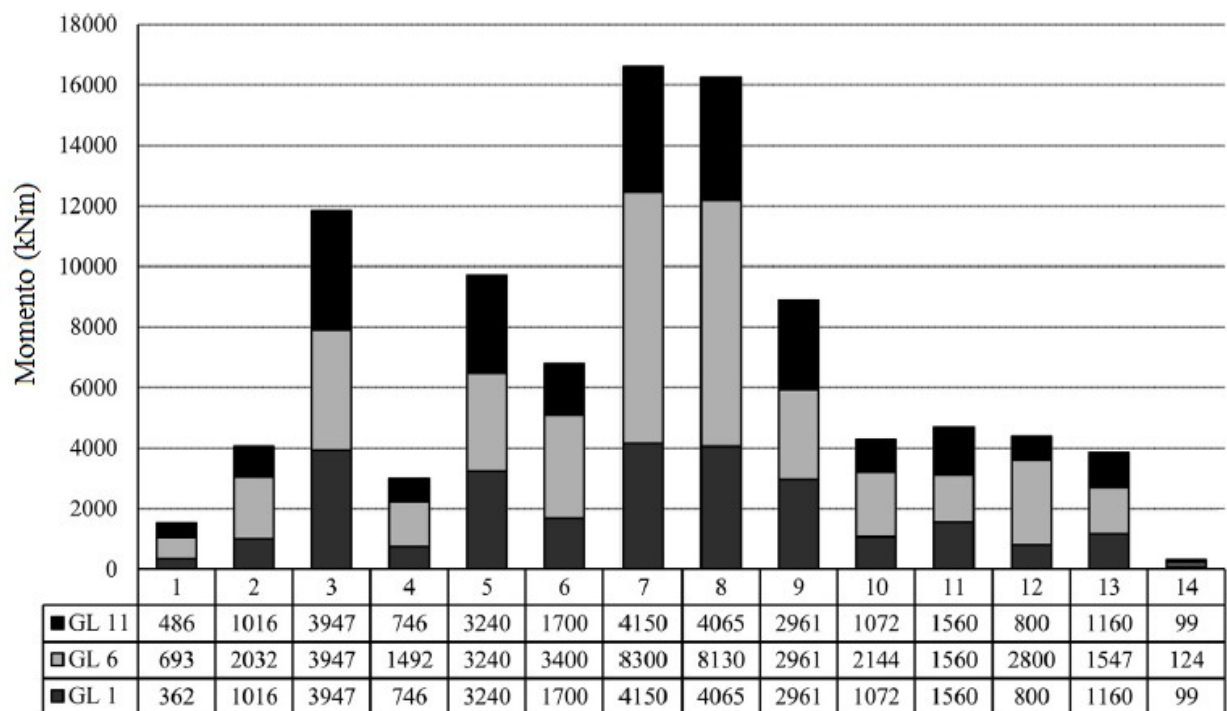


Figura 3.34 – Momentos nos pilares parede obtidos por cada participante (FRÖDERBERG&THELANDERSSON, 2015)

Para avaliar o quão bem um engenheiro modela um sistema estrutural, os autores propõem o termo incerteza de modelagem de engenharia (*Engineering Modeling Uncertainty*), o EMU. O EMU é definido a partir dos resultados observados, como uma função do que chamam de conhecimento em engenharia  $f(K)$ , dividido pela solução correta ou, como os autores apresentam, uma resposta adotada como verdadeira  $R$ . Esta incerteza pode então ser descrita por uma média e um desvio padrão. A finalidade do EMU é levar em conta as incertezas normalmente não contempladas pelas normas, que seriam a qualidade do modelo de análise em função do problema arquitetônico apresentado. Este termo inclui efeitos relacionados com um comportamento mais complexo do sistema estrutural, como as condições de contorno, efeitos tridimensionais complexos, comportamento não linear, ligações e continuidade da estrutura. O EMU também leva em consideração as diferenças nas interpretações de diferentes normas, uma vez que, segundo os autores, as extensas normas atuais levam inevitavelmente diferentes interpretações, o que por sua vez irá afetar o resultado e o grau de incertezas. Com relação aos carregamentos, pode haver variabilidades nas magnitudes e os tipos de carregamentos, a combinação de ações e coeficientes de ponderação de cargas.

Para avaliar o efeito do EMU na estrutura estudada, os autores realizam o dimensionamento de um bloco de fundação, sob o pilar B3, segundo uma análise elástico linear efetuada pelo método dos elementos finitos, onde o carregamento é suposto uniformemente distribuído. Os resultados obtidos na análise e o dimensionamento são considerados pelos autores como a resposta verdadeira  $R$ , e podem ser observados no Quadro 3.6 A incerteza de modelo EMU em relação aos resultados obtidos pelos participantes são avaliados de duas maneiras diferentes. A

primeira ( $\lambda_\delta$ ) explora a distribuição dos carregamentos, ou seja, quanto da carga foi considerada para o bloco em questão com relação à carga total considerada pelo participante. A segunda ( $\lambda_Q$ ) consiste da variabilidade do carregamento total considerado pelo participante em relação à obtida pela resposta verdadeira  $R$ .

**Quadro 3.6 – Resultados "Reais"  $R$  da análise por elementos finitos (FRÖDERBERG&THELANDERSSON, 2015)**

Pilar	$R$ (kN)	$R_\delta$ (%)
<b>B3</b>	1155	39
<b>C3</b>	1028	35
<b>D3</b>	788	26
<b>Total</b>	2971	100

Os valores médios de  $f(K)$  acabam sendo claramente tendenciosos em relação à resposta real  $R$ , indicando uma divergência na escolha de modelo de análise. Para o bloco estudado, a incerteza de modelo EMU para  $\lambda_\delta = f(K)/R$  teve uma média de 0,89 e um coeficiente de variação de 16%, enquanto que  $\lambda_Q = f(K)/R$  teve uma média de 1,08 e um coeficiente de variação de 18%. Um subestimação do efeito da carga, ou seja um EMU  $\lambda_\delta$  com média menor que 1, significa que a estrutura, com base nestes cálculos, será sub-dimensionada. Isto por sua vez significa que o EMU deverá ser adicionado à parte da resistência da equação de estado limite, quando utilizado em uma análise probabilística.

Para se estimar o efeito do EMU sobre o índice de confiabilidade, os autores apresentam uma análise utilizando o método SORM, quando se deseja analisar a confiabilidade apenas do bloco de fundação sob o pilar na posição B3. Para resolver este problema, o processo foi dividido em duas etapas. Em primeiro lugar, a estrutura é dimensionada de acordo com Eurocode 2 em função da carga  $R$ . Em segundo lugar, a confiabilidade da estrutura é analisada sem e com a consideração do EMU. Ou seja, os autores fazem uma primeira análise de confiabilidade considerando apenas a variável erro de modelo fornecida pelo JCSS, e depois uma análise de confiabilidade considerando os EMUs  $\lambda_\delta$  e  $\lambda_Q$  em conjunto, no entanto como variáveis independentes.

A probabilidade de falha calculada para as equações de estado limite mostrou uma contribuição significativa do EMU na redução da confiabilidade geral. O resultado da primeira análise, considerando a variável erro de modelo fornecida pelo JCSS, mostrou uma probabilidade de falha de aproximadamente 4,0e-07, com um  $\beta=4,9$ . Na segunda análise, considerando os EMUs, a probabilidade de falha resultou em 4,3e-03, com um  $\beta=2,6$ .

O resultado deste estudo apresentado por Fröderberg e Thelandersson (2015) mostra que as incertezas de modelagem de engenharia afetam o resultado do cálculo estrutural. Ainda os autores propõem que independente da modelagem que um calculista adota, existe a possibilidade que todas sejam possíveis, desde que se tomem as providências cautelares adequadas.

Os autores concluem que existe uma grande variação dos resultados obtidos pelos participantes, e uma grande variabilidade nos resultados dos modelos adotados, resultado em um EMU com coeficiente de variabilidade alto, o que faz que o EMU tenha uma grande influência na segurança da estrutura.

Os autores comentam o fato de que, muitas vezes, os engenheiros confiam na capacidade de redistribuição de esforços no concreto armado por conta da sua capacidade de plastificação, sabendo que essa redistribuição será atingida no estado limite último. Em alguns casos, no entanto, como no caso estudado pelos autores, não existe a capacidade de redistribuição plástica, portanto no caso de atingimento da carga de ruptura muito provavelmente ocorreria a falha estrutural.

A fim de definir uma margem de segurança em razão das incertezas apresentadas, os autores propõem o desenvolvimento do conceito do EMU, inicialmente detectando e identificando as incertezas a ele relacionadas para então proceder à sua parte quantitativa. O EMU não deveria ser regulado por norma, mas deveria estar relacionado com o nível de incerteza do modelo para o qual as equações da norma foram calibradas.

## 4 *Procedimentos Metodológicos*

Neste capítulo são descritos as fases e etapas da pesquisa para os estudos pelas duas abordagens propostas neste trabalho: o estudo dos esforços solicitantes (N e M) para cálculo da punção obtidos por diferentes modelagens de pilar e diferentes métodos; e o estudo das tensões solicitantes obtidas no perímetro crítico  $c'$  da NBR 6118/2014 pelo método dos elementos finitos por diferentes modelagens de pilar.

Inicialmente são introduzidas as diferentes modelagens de pilares usadas no MEF e AG. Todas as análises estruturais de esforços e tensões solicitantes são efetuadas usando o programa SAP2000 v14. São formalizados os conceitos adotados para a definição das incertezas de modelo e, para a análise probabilística, apresenta-se a equação de equilíbrio para o cálculo da confiabilidade, assim como as demais variáveis aleatórias consideradas nas análises probabilísticas. Após a introdução dos parâmetros gerais (utilizados nas duas abordagens propostas), são expostas as metodologias específicas para cada uma das duas abordagens propostas.

É importante enfatizar que os estudos de confiabilidade são apresentados de forma a entender o comportamento, com uma visão de projeto, da influência das variabilidades verificadas nos exemplos. Desta forma, somente os efeitos das incertezas de modelo são de interesse na análise probabilística, que será, portanto, efetuada de maneira simplificada. Isso significa que os resultados das análises probabilísticas não devem ser interpretados como valores absolutos, mas apenas indicadores de um possível cenário, considerando as variabilidades estudadas. Sendo assim, admitiu-se o uso de expressões simplificadas. Ainda, supôs-se que todos modelos possuem a mesma probabilidade de serem adotados na fase de análise da estrutura. Desta forma, é possível examinar comparativamente os modelos com relação a sua adequabilidade na obtenção dos esforços e tensões para a punção.

Para a primeira abordagem (estudo dos esforços), são classificados os 16 modelos adotados. Neste capítulo é apresentado um estudo de sensibilidade dos fatores que amplificam os valores dos momentos desbalanceados na laje, que é usado para definir os 4 exemplos com diferentes configurações de assimetria e proporção de lados do pilar. São expostas as equações para determinar os parâmetros de erro de modelo usados no cálculo da confiabilidade, baseados na metodologia de Fröderberg & Thelandersson (2015).

Para a segunda abordagem (estudo das tensões solicitantes no perímetro crítico  $c'$ ), é adotada a metodologia de Bølviken (2013). São apresentados os parâmetros usados para obter os valores das tensões solicitantes e os métodos de análise usados para verificar a adequabilidade de cada modelo com relação às equações de verificação da punção da NBR 6118/14.

### 4.1 Parâmetros gerais

Neste item são referidos os parâmetros e dados utilizados nas duas abordagens propostas no presente trabalho. Apresentam-se os fundamentos e referências bibliográficas para a modelagem e obtenção das tensões no perímetro crítico e esforços solicitantes dos pilares internos, bem como

os fundamentos para a análise probabilística da influência das diferentes modelagens ou métodos na confiabilidade da punção em pilares internos. Os fundamentos do método dos elementos finitos, do processo por analogia de grelha e os métodos dos pórticos equivalentes adotados neste trabalho podem ser observados no item 2.4.

#### 4.1.1 Modelagem de pilares

No total são usados 7 modelos diferentes para simular o efeito do pilar na ligação laje-pilar nas lajes lisas estudadas pelos métodos numéricos. A seguir são expostos os modelos, a referência bibliográfica e os parâmetros de cada um.

##### 4.1.1.1 Apoio pontual com trecho rígido (NBR 6118/2014)

Neste modelo são considerados trechos rígidos nas ligações laje-pilar. Conforme a NBR 6118/14 em seu item 14.6.2.1, os trechos de elementos lineares pertencentes a região comum ao cruzamento de dois ou mais elementos podem ser considerados como rígidos (nós de dimensões finitas), conforme a Figura 4.1.

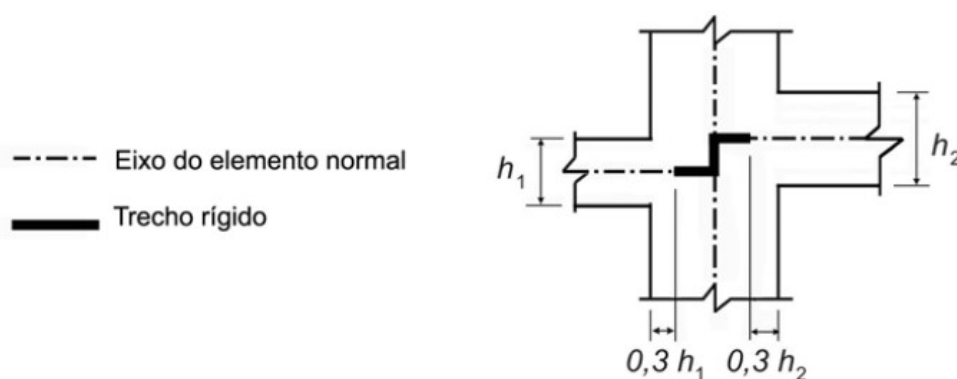


Figura 4.1 – Trechos rígidos (NBR 6118 /14)

Nos modelos estudados pelo MEF e AG, consideram-se as rigidezes à flexão e ao cisalhamento igual a 100 vezes o valor dos demais elementos de placa no trecho rígido. Nos modelos onde se faz uso do processo de analogia de grelha, as barras no trecho rígido também têm sua rigidez axial, ao cisalhamento, à flexão e torção igual a 100 vezes o valor das demais barras sem enrijecimento.

##### 4.1.1.2 Apoio pontual

Os pilares modelados como apoio pontual são representados por uma barra com as propriedades do pilar, tendo como apoio apenas um ponto. A Figura 4.2 mostra um exemplo de pilar modelado como apoio pontual usando o processo de analogia de grelha. Usualmente este tipo de modelagem apresenta o problema de singularidade, onde os momentos negativos tendem ao infinito no ponto de apoio do pilar.

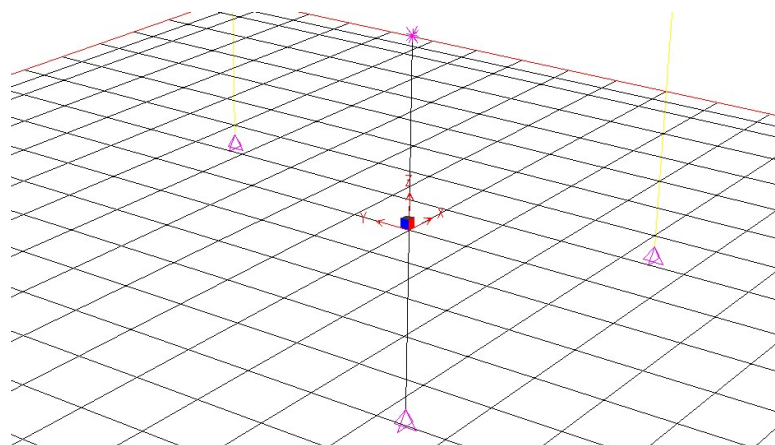


Figura 4.2 – Pilar modelado como apoio pontual

#### 4.1.1.3 Carga distribuída na laje (PEDROZO, 2008; PUEL, 2009)

A modelagem simulando os pilares como uma reação na laje segue a proposta por Puel (2009), onde se procurava evitar o problema da singularidade que ocorre quando se modela um pilar como um apoio pontual. Portanto, considera-se o pilar como uma carga distribuída de baixo para cima, em uma determinada área na laje, considerando as dimensões do pilar. Essa metodologia também foi adotada por Pedrozo (2008), porém sem a consideração de transferência de momentos. A distribuição da carga no modelo numérico para um caso com transferência de momentos em um dos eixos tem formato triangular, e segue o ilustrado pela Figura 4.3.

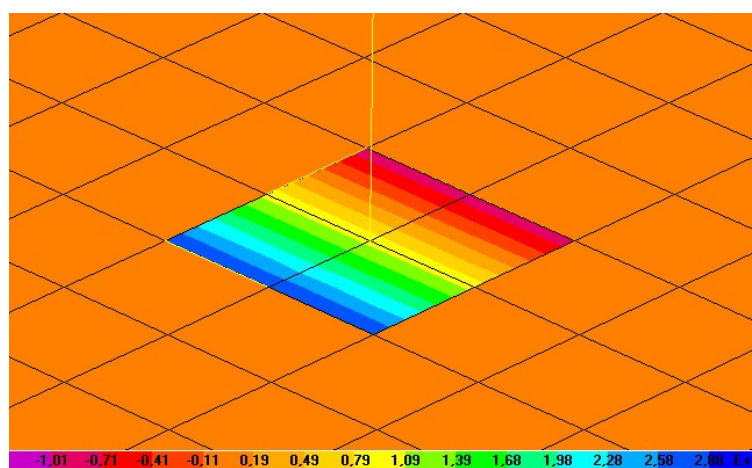


Figura 4.3 – Arredondamento de momentos fletores (NBR 6118 /14)

No presente estudo, onde ocorre a transferência de momentos da laje para os pilares, deve-se levar em conta a flexão no pilar, que pode ser substituída por um binário de forças, calculado a partir da soma dos momentos acima e abaixo do nó, os quais aplicados como reação na laje resulta em um diagrama prismático triangular de carregamentos, conforme mostra a Figura 4.4.



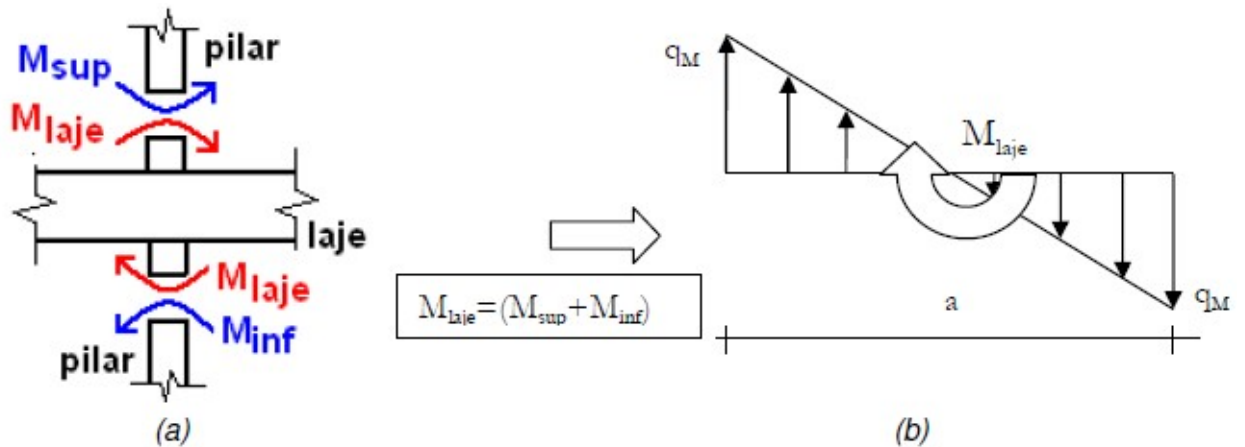


Figura 4.4 – Binário de forças resultante do momento no pilar aplicado como reação na laje (PUEL, 2009)

O valor de  $q_M$  pode ser constante ou variar ao longo da outra dimensão do pilar. No caso de assimetria em apenas um dos eixos o valor de  $q_M$  é dado por:

$$q_M = \frac{6.M_{laje}}{a^2.b} \quad [eq. 4.1]$$

onde:

$q_M$  é o valor da extremidade do carregamento aplicado como reação na laje;

$M_{laje}$  é o momento fletor atuante na laje obtido através do somatório do momento do pilar superior e do pilar inferior ao nó;

$a$  é a dimensão do pilar no plano de atuação do momento;

$b$  é a outra dimensão do pilar.

A partir do esforço axial do pilar, pode-se determinar o valor da carga distribuída  $q$  a ser aplicado como reação na laje:

$$q = \frac{P}{a.b} \quad [eq. 4.2]$$

onde  $P$  é o esforço axial no pilar.

A metodologia para simular os esforços axiais e de flexão do pilar com assimetria em um eixo como reação aplicada na laje consiste em um processo iterativo, descrito a seguir:

- i. Analisa-se inicialmente a estrutura modelando o pilar como apoio pontual, obtendo-se os diagramas de esforço normal e momentos fletores do pilar;
- ii. Encontra-se o valor de  $q$  através da [eq. 4.2] e de  $q_M$  pela [eq. 4.1]. Faz-se a sobreposição dos efeitos normais  $q$  e de flexão  $q_M$  do pilar, obtendo-se um diagrama de carregamento final com valores  $q_E$  (face esquerda do pilar) e  $q_D$  (face direita), adicionando-o na laje, conforme mostrado na Figura 4.5;

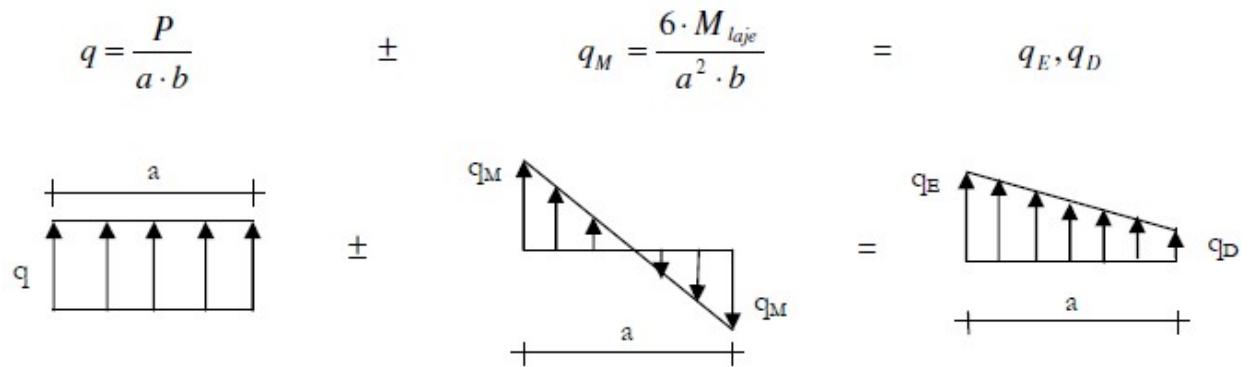


Figura 4.5 – Carregamento final com  $q_E$  e  $q_D$  aplicado como reação na laje (PUDEL, 2009)

- iii. Na sequência, as barras dos pilares são substituídas por um apoio do segundo gênero, conforme Figura 4.6;

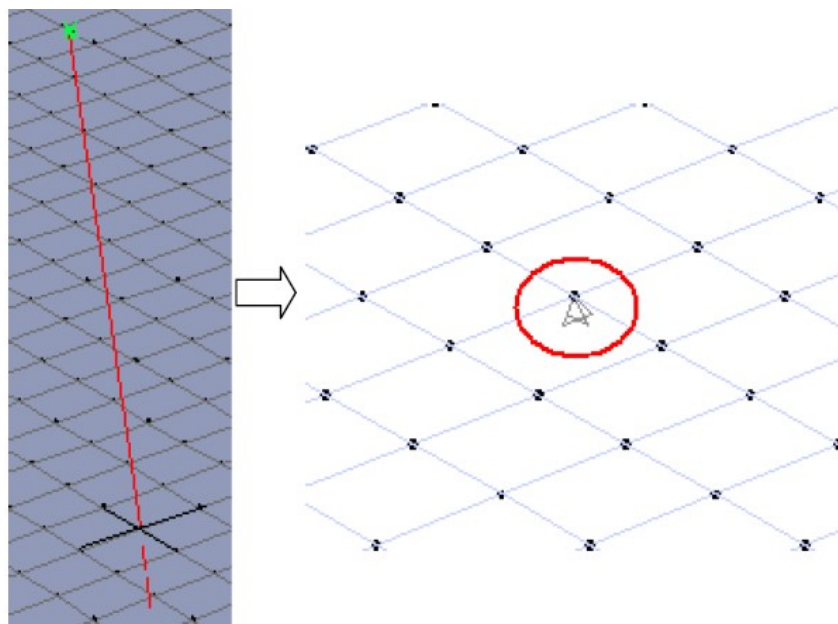


Figura 4.6 – Pilar modelado como barra substituído por um apoio do segundo gênero (PUDEL, 2009)

- iv. Analisa-se novamente a estrutura, obtendo-se no apoio do segundo gênero em substituição às barras do pilar (circulado em vermelho na Figura 4.6), a reação no apoio e a rotação do nó;
- v. A reação de apoio deve ser nula ou praticamente nula (dentro de um limite estabelecido pelo projetista). Caso não for, deve-se corrigir o esforço axial inicial a partir da diferença encontrada nessa iteração;
- vi. Através da rotação do nó, verifica-se qual é o novo momento atuante, multiplicando-se a rotação do nó pela rigidez de uma mola que simula a rigidez da barra do pilar, modelado metade para cima e metade para baixo da laje, conforme Figura 4.7.

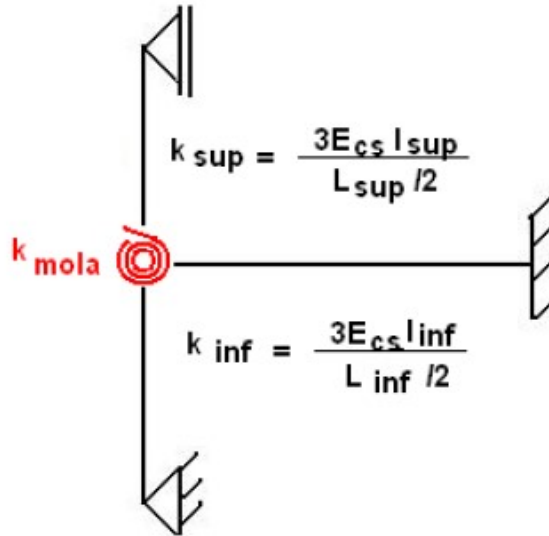


Figura 4.7 – Rigidez da mola (PUEL, 2009)

A rigidez da mola  $k_{mola}$  é dada por:

$$k_{mola} = \frac{3.E_{cs}.I_{sup}}{L_{sup}/2} + \frac{3.E_{cs}.I_{sup}}{L_{sup}/2} \quad [eq. 4.3]$$

onde:

$E_{cs}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto;

$I_{sup}$  é o momento de inércia do pilar superior;

$I_{inf}$  é o momento de inércia do pilar inferior;

$L_{sup}$  é o comprimento do pilar superior;

$L_{inf}$  é o comprimento do pilar inferior.

O momento fletor atuante na laje  $M_{laje}$  é calculado por:

$$M_{laje} = k_{mola} \cdot \varphi_P \quad [eq. 4.4]$$

onde  $\varphi_P$  é a rotação no nó do vínculo do pilar, obtido do diagrama de carregamento  $q_E$  e  $q_D$ , aplicado como reação na laje. O *software* SAP2000 já apresenta o vínculo correspondente para  $\varphi$  como sendo a rotação R2, com o valor em radianos, conforme Figura 4.8.

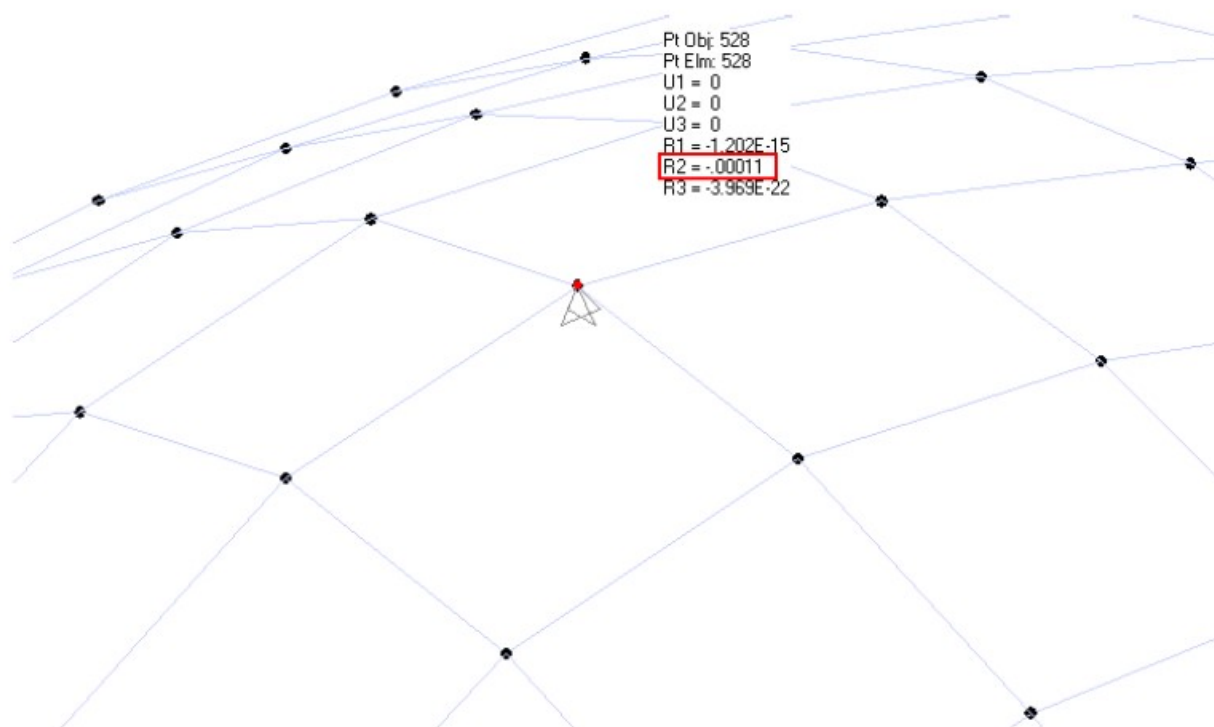


Figura 4.8 – Rotação do nó no vínculo do pilar (PUEL, 2009)

Caso o momento fletor atuante no nó do vínculo do pilar nessa iteração não seja igual ao momento anterior, utilizado para encontrar  $q_E$  e  $q_D$ , torna-se necessário repetir o processo. A convergência se dá quando o momento obtido na iteração atual é igual ou praticamente igual ao utilizado na interação anterior.

- vii. Caso não haja convergência no processo, é necessário ajustar os valores de  $q$  e  $q_M$  a partir dos novos valores de esforço normal e momento fletor, compondo um novo diagrama de carregamentos a partir dos valores de  $q_E$  e  $q_D$ . Esse novo diagrama será novamente aplicado na laje até que se tenha a convergência do esforço normal e momento fletor.

#### 4.1.1.4 Carga distribuída no centro da altura da laje (PEDROZO, 2008; PUEL, 2009)

Outra alternativa de modelagem apresentada por Puel (2009) e Pedrozo (2008) e adotada neste estudo, consiste em considerar o carregamento atuando no centro da altura da laje, como uma projeção a 45° da superfície de contato do pilar, conforme Figura 4.9. Tal critério é considerado na análise da ação de rodas de veículos sobre o tabuleiro de uma ponte. Uma vez que se tem o aumento da área de distribuição da reação, têm-se uma suavização no diagrama de momentos fletores da laje, dada a diminuição da rotação do nó. A obtenção dos valores das cargas distribuídas segue a mesma metodologia do item 4.1.1.3.

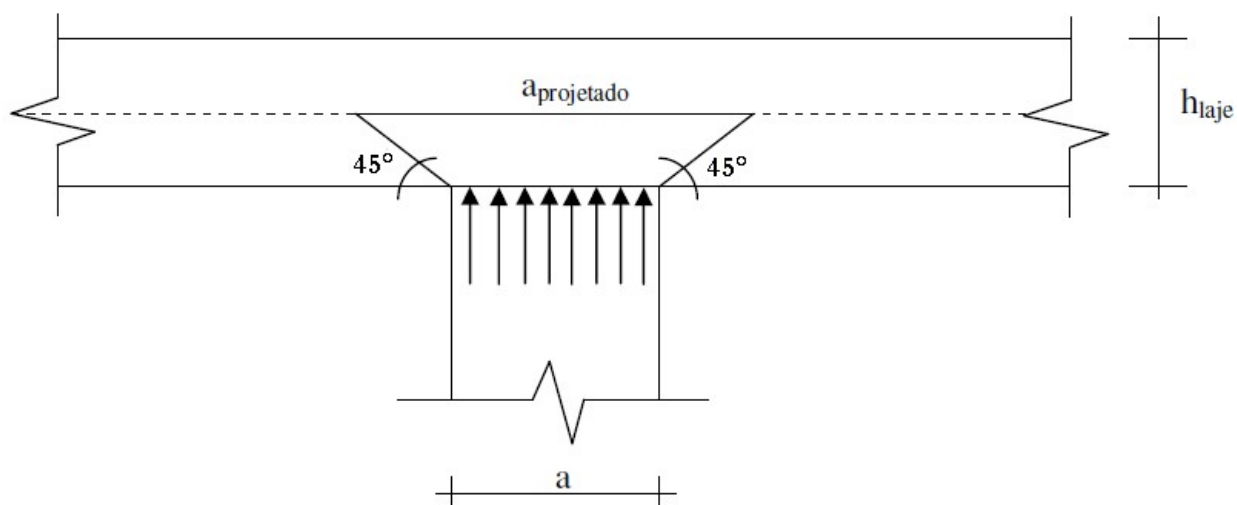


Figura 4.9 – Área projetada do pilar no centro da altura da laje

#### 4.1.1.5 Elementos sólidos (HENNRICH, 2003; ROMBASH, 2004)

Adotou-se também a opção de modelagem do pilar com elementos sólidos tetraédricos de oito nós no programa SAP 2000, utilizando as dimensões originais do pilar, bem como suas propriedades mecânicas. Todos os demais elementos (laje, viga de borda e pilares) mantiveram as mesmas características dos outros casos. A Figura 4.10 apresenta um caso do pilar interno modelado como elementos sólidos.

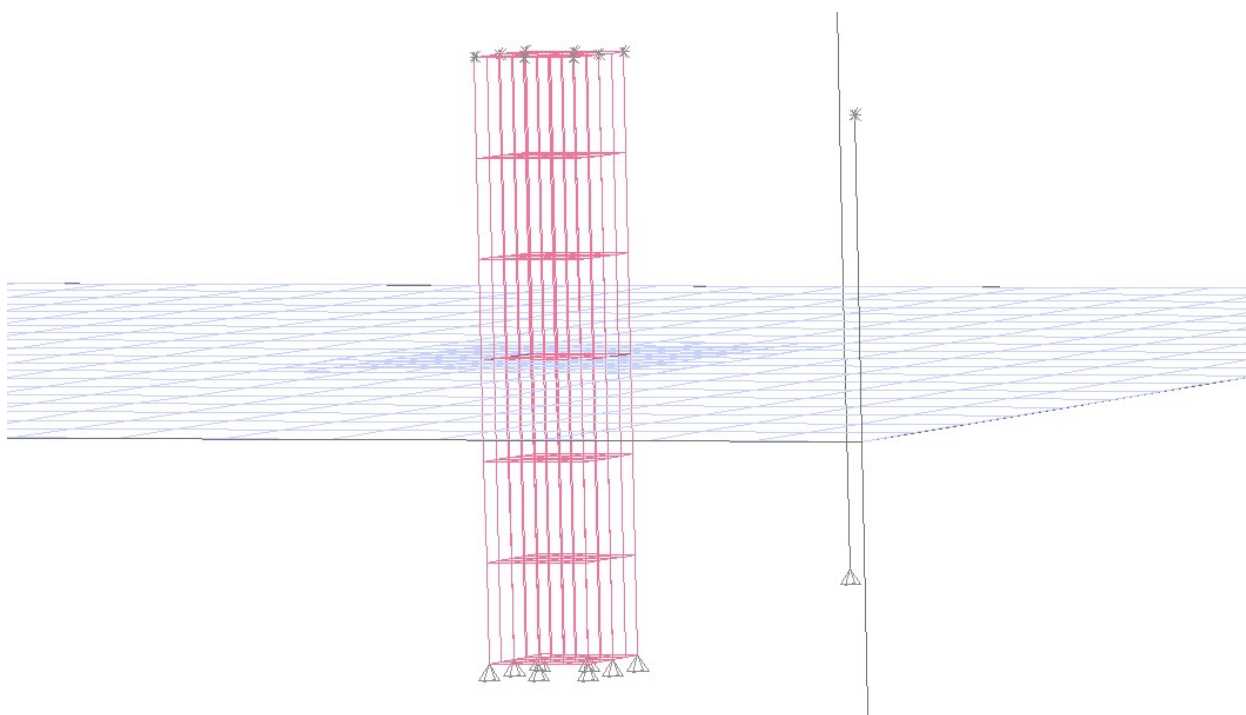


Figura 4.10 – Pilar interno modelado como elementos sólidos

#### 4.1.1.6 Quatro apoios pontuais (SILVA, 2013)

A opção de modelagem do pilar como quatro apoios pontuais foi obtida de Silva (2013), onde se faz a divisão do pilar por quatro elementos de barra, atribuindo a cada elemento as características geométricas que no todo formam o pilar inicial. A Figura 4.11 mostra um exemplo de modelagem de um pilar interno quadrado.

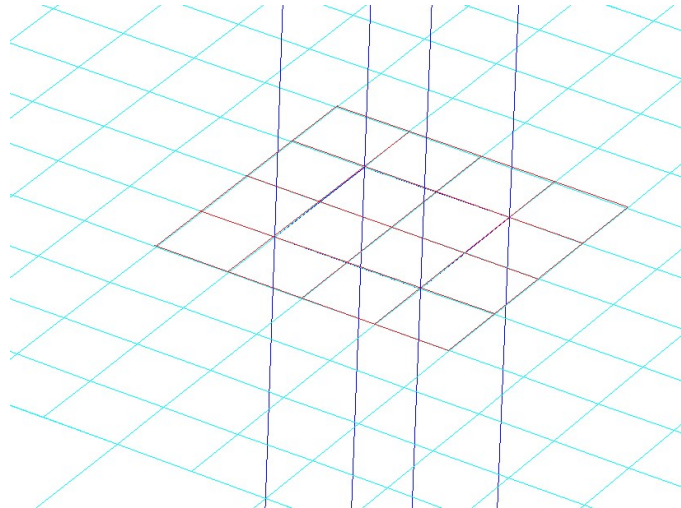


Figura 4.11 – Pilar modelado como quatro apoios pontuais

#### 4.1.1.7 Quatro elementos de mola (ENOCHSSON, 2001; ROMBASH, 2004)

A modelagem utilizando quatro elementos de mola foi obtida de Enochsson (2001) e Rombash (2004). Similarmente ao pilar modelado como quatro apoios pontuais, substitui-se o pilar por quatro elementos de mola, atribuindo a cada elemento as rigidezes à compressão ( $k_{zz}$ ) e à rotação do nó da ligação laje pilar em torno dos eixos onde há assimetria ( $k_{xy}$  e  $k_{yx}$ ), conforme Figura 4.12. As molas verdes representam  $k_{zz}$  e as vermelhas  $k_{xy}$  e  $k_{yx}$ .

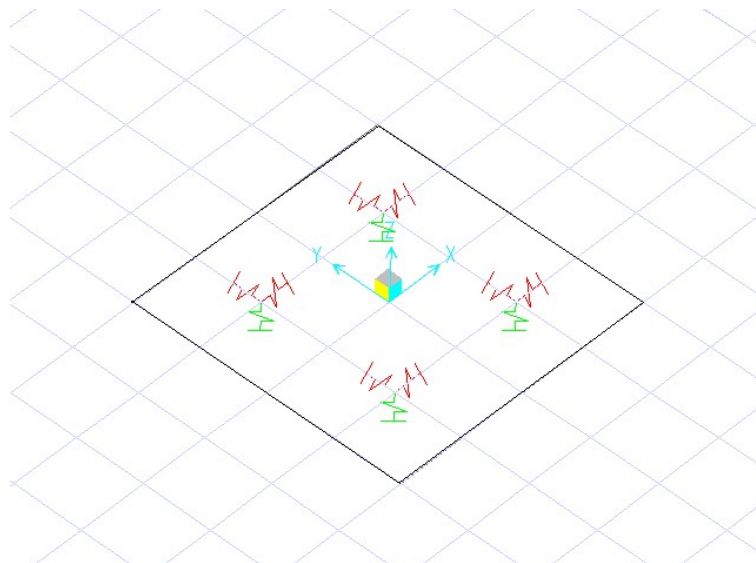


Figura 4.12 – Modelo de pilar com quatro molas

A rigidez  $k_{zz}$  é calculada de acordo com a definição da deformação axial de uma barra, dada por:

$$k_{zz} = \frac{EA'}{L} \quad [eq. 4.5]$$

As rigidezes  $k_{xx}$  e  $k_{yy}$  são dadas por:

$$k_{yx} = \frac{3EI'_y}{L} \quad [eq. 4.6]$$

e

$$k_{xy} = \frac{3EI'_x}{L} \quad [eq. 4.7]$$

onde:

$A'$  - área referente ao quarto de área da seção do pilar;

$I'_y$  - momento de inércia em torno de y referente ao quarto da seção do pilar;

$I'_x$  - momento de inércia em torno de x referente ao quarto da seção do pilar.

#### 4.1.2 Variável Erro de Modelo e *Engineering Modelling Uncertainty* (EMU)

Os esforços solicitantes e as tensões de cisalhamento no perímetro crítico podem variar dependendo do modelo. Neste trabalho será adotado o estudo de erro de modelo EMU (*Engineering Modeling Uncertainty*) proposto por Froderberg & Thelandersson (2015) para a análise do impacto destas variabilidades.

O erro de modelo é definido por:

$$E_M = \frac{R_\delta}{\bar{f}_\delta(K)} \quad [eq. 4.8]$$

onde:

$E_M$  - Erro de modelo;

$R_\delta$  - esforço de referência ou real;

$\bar{f}_\delta(K)$  - esforços obtidos nos demais modelos.

Fazendo:

$$\lambda_\delta = \frac{1}{E_{M,i}} \quad [eq. 4.9]$$

tem-se:

$$\lambda_\delta = \frac{\bar{f}_\delta(K)}{R_\delta} \quad [eq. 4.10]$$

onde:

$E_{M,i}$  – Erro do modelo  $i$

$\lambda_\delta$  - *Engineering Modelling Uncertainty* (EMU).

O EMU é definido a partir dos resultados observados, como uma função do resultado dos modelos  $f(K)$ , dividido pela solução correta ou, como apresentado por Fröderberg e Thelandersson (2015) e no presente trabalho, uma resposta adotada como verdadeira  $R$ . Esta incerteza pode então ser descrita por uma média e um desvio padrão. Neste trabalho, para a análise do efeito da variabilidade dos esforços, os esforços de referência  $R_\delta$  foram considerados como os obtidos pelo método dos elementos finitos, supondo pilar como apoio pontual e trecho rígido na laje, conforme NBR 6118/2014. A escolha por este tipo de análise como sendo a resposta real, deve-se ao fato de o MEF tender a ser o método de análise mais preciso dentre os três usados no presente trabalho (SHERIF & DILGER, 2000; HENNRICH, 2003), e a consideração do trecho rígido ser uma sugestão da NBR 6118/14, item 14.6.2.1. Para a análise da variabilidade das tensões no perímetro crítico, a resposta verdadeira  $R$  foi a obtida direto da equação [eq. 2.4], a mesma fornecida pela NBR 6118/14 no seu item 19.5.2.2.

Uma subestimação do efeito da carga, ou seja, um EMU com média menor que 1, significa que a estrutura, com base nestes cálculos, será sub-dimensionada. Isto por sua vez significa que o EMU deverá ser adicionado à parte da resistência da equação de estado limite, quando utilizado na análise probabilística. Portanto, em todos os casos estudados o erro de modelo é considerado em uma única função. Essa metodologia é adotada por pesquisadores como Nowak & Racokzy (2013), Sørensen (2000) e Fröderberg & Thelandersson (2015) e também é adotada no presente estudo. Outros pesquisadores, como Stucchi & Santos (2010), optam por multiplicar a diferença entre a parcela resistente e solicitante ( $R - S$ ) da equação de estado limite. Uma outra opção seria multiplicar separadamente os erros de modelos em cada uma das parcelas – resistente e solicitante – isoladamente. Apesar desta ser aparentemente a solução mais próxima da ideal, não foi observada na literatura.

#### 4.1.3 Análise probabilística

Segundo Beck (2012), os requisitos básicos de sistemas estruturais podem ser equacionados na forma de estados limites. O não atendimento de um requisito de serviço ou de segurança representa um estado indesejável da estrutura. No caso da punção, tem-se um estado limite último, já que esta falha pode levar ao colapso ou a um dano grave e permanente da estrutura.

Não se localizou uma equação de estado limite para a punção na literatura, de modo que foi necessário elaborar uma equação de estado limite último para o cálculo da probabilidade de falha por punção para casos de estudo. Para tanto, utilizaram-se as equações de tensão resistente [eq. 2.7] e tensão solicitante [eq. 2.4] da NBR 6118/14. A equação do estado limite último é dada por:

$$g(x) = \tau_{Rd} - \tau_{sd} \quad [eq. 4.11]$$



onde:

$\tau_{Rd}$  - é a tensão resistente de cálculo da punção pela NBR 6118/14;

$\tau_{Sd}$  - é a tensão solicitante de cálculo da punção pela NBR 6118/14;

A parcela da equação [eq. 2.4] na [eq. 4.11] foi modificada para que fosse possível levar em conta as variabilidades das ações permanentes e acidentais no cálculo probabilístico. Assim, isolou-se a força de reação do pilar  $F_{sd}$ , como um valor de cálculo, substituindo-o pela soma dos valores característicos das parcelas das ações permanentes  $N_G$  e acidentais  $N_Q$ . Os momentos desbalanceados de cálculo  $M_{sd1}$  e  $M_{sd2}$  são substituídos pelas excentricidades  $e_1$  e  $e_2$ , que fornecem os momentos desbalanceados com valores característicos, uma vez que são obtidos em função das ações permanentes e acidentais atuantes  $N_G$  e  $N_Q$ . Expandindo a [eq. 4.11], tem-se:

$$g(x) = \xi \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} - (N_G + N_Q) \cdot \left(\frac{1}{u \cdot d} + \frac{K \cdot e}{W_p \cdot d}\right) \quad [eq. 4.12]$$

onde:

$\xi$  - valor implícito de segurança no cálculo da punção pela NBR 6118/14 ;

$d$  - Altura útil da laje;

$\rho$  - Taxa de armadura negativa de flexão;

$f_c$  - Resistência à compressão do concreto;

$N_G$  - Parcela do esforço normal do pilar referente às cargas permanentes;

$N_Q$  - Parcela do esforço normal do pilar referente às cargas acidentais;

$u$  - Perímetro de controle na distância  $2d$  do pilar;

$K$  - Coeficiente de proporção dos lados do pilar;

$e$  - Excentricidade da reação de esforço normal do pilar;

$W_p$  - Módulo de resistência plástica do perímetro crítico  $u$ , dado por:

$$W_p = \frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 + 4c_2 d + 16d^2 + 2\pi d \quad [eq. 4.13]$$

onde:

$c_1, c_2$  - dimensões dos lados do pilar, paralela e perpendicular à excentricidade, respectivamente.

As excentricidades  $e$  para cada um dos eixos, bem como as parcelas permanentes e acidentais da força de reação do pilar são obtidas do modelo 1 (pilar com trecho rígido e MEF). O dimensionamento da armadura negativa de flexão também é feito usando os esforços do modelo 1.

No cálculo probabilístico, consideraram-se as excentricidades como determinísticas, ou seja, a variabilidade dos momentos desbalanceados será dada unicamente pelas variabilidades das ações permanentes e acidentais, e pelas variáveis de incerteza de modelo. Da mesma forma, a taxa de armadura negativa de flexão sobre os pilares é considerada como determinística, e suas variabilidades são levadas em conta pela variável aleatória de incerteza de modelo EMU.

As variáveis consideradas como aleatórias na [eq. 4.12], além da resistência à compressão do concreto existente na estrutura, são a altura útil da laje e as dimensões  $c_1$  e  $c_2$  do pilar, que influenciam diretamente o perímetro de controle  $u$  e o módulo de resistência plástica  $W_p$ . No caso destas variáveis aleatórias, a literatura fornece diferentes médias e coeficientes de variação para as análises probabilísticas. Neste trabalho, optou-se em adotar os parâmetros estatísticos da altura útil da laje  $d$  fornecidos pelo JCSS (2001) e os parâmetros da resistência à compressão do concreto  $f_c$  utilizados em Stucchi & Santos (2010). Observa-se pela Figura 4.13 que  $\xi$  é dado em função de  $f_{ck}$ , portanto diferentes valores de  $f_c$  resultariam em diferentes valores esperados de  $\xi$ . Neste trabalho, adotaram-se os parâmetros de  $\xi$  obtidos de Gomes (1990). No caso do coeficiente de variação de  $f_c$ , existiria a opção em se utilizar uma variabilidade relacionada à resistência à tração do concreto, maior que a adotada no presente estudo. Em todos os casos, a adoção dos parâmetros estatísticos apresentados no Quadro 4.1 não altera o resultado qualitativo das análises.

O valor implícito de segurança  $\xi$  foi considerado de forma a ajustar a equação de tensão resistente de punção da norma brasileira à variabilidade dos resultados de ensaios na qual ela é baseada. Desta forma, ajustou-se uma função de distribuição de probabilidades, encontrando uma média e um desvio padrão para  $\xi$  através do estudo apresentado por Gomes (1990), onde são listadas os valores da razão entre dados experimentais e as prescrições do CEB Model Code de 1990 para estimação da carga última de punção. São apresentados os resultados de lajes que falharam na região armada contra a punção e de lajes que romperam na região não armada, todas por punção. Considerando apenas os casos onde a laje rompeu na região não armada,  $\xi$  apresentou uma média igual a 0,1872 e um desvio padrão de 0,0206. Considerando todos os casos,  $\xi$  apresentou média igual a 0,1766 e desvio padrão de 0,0260. As duas situações podem ser descritas por uma distribuição normal de probabilidades. Como o presente estudo considera apenas os casos de lajes não armadas contra a punção, optou-se por adotar como parâmetros estatísticos de  $\xi$  a média de 0,187 e o desvio padrão de 0,02. A linha vermelha da Figura 4.13 representa o valor esperado destes dados experimentais.

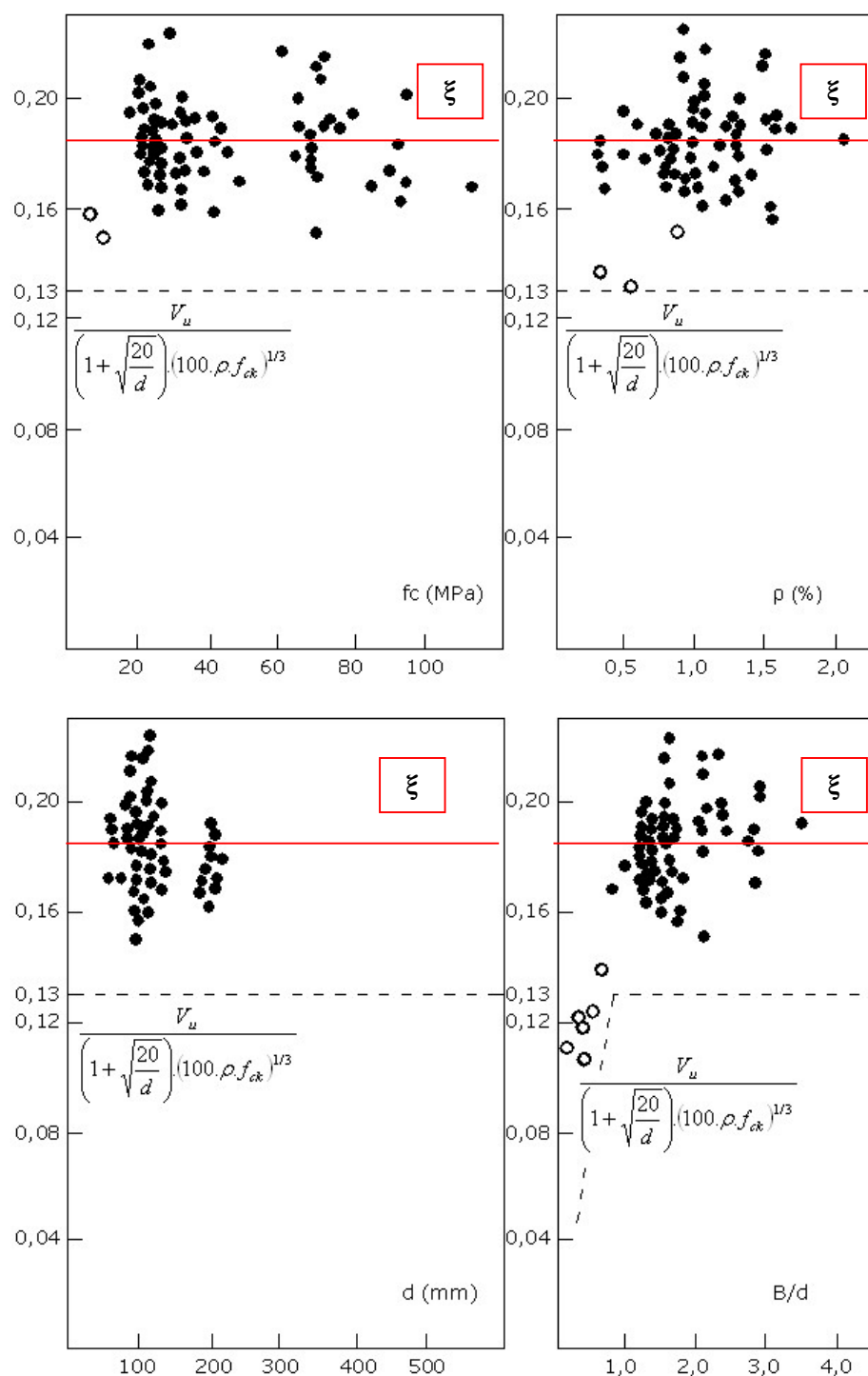


Figura 4.13 – Comparação dos resultados obtidos em ensaios com a NBR 6118 (FIB Bulletin 12, 2001)

Para a análise probabilística, transformam-se os esforços, materiais e geometria em variáveis aleatórias. O Quadro 4.1 apresenta as distribuições de probabilidades, bem como as médias e coeficientes de variação adotados no presente trabalho para a análise de confiabilidade. Como já comentado anteriormente, tanto a taxa de armadura  $\rho$  como a excentricidade  $e$  são consideradas constantes, obtidas pelo do modelo 1. Os demais parâmetros de variáveis aleatórias são específicas para cada caso de estudo e são apresentados no capítulo 5.

**Quadro 4.1 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias**

<b>Categoria</b>	<b>Descrição</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Distribuição</b>	<b>Média</b>	<b>Coefficiente de Variação</b>	<b>Fonte</b>
Esforços	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga permanente	$N_G$	Normal	1,0	0,04	JCSS (2001)
	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga acidental	$N_Q$	Gumbel	1,0	0,25	JCSS (2001)
Materiais	Resistência média do concreto	$f_c$	Normal	$1,196 \cdot f_{ck}$	0,15	STUCCHI & SANTOS (2010)
Geometria	Altura útil da laje	$d$	Normal	1,0	0,025	JCSS (2001)
	Dimensão do lado i do pilar	$c_i$	Normal	1,0	0,01	JCSS (2001)

- **Função de distribuição de probabilidades**

Após a obtenção dos dados de esforços e tensões, procede-se ao ajuste destes dados à curvas de distribuição de probabilidades pelo programa *EasyFit* 5.6, onde se obtém os parâmetros das curvas. O teste de aderência adotado é o Kolmogorov-Smirnov, onde para cada ajuste de curva de distribuição de probabilidade é apresentado o p-valor, sendo que a hipótese nula aceita a representação da distribuição dos dados pela função de distribuição de probabilidades.

- **Índice de confiabilidade e probabilidade de falha**

A análise probabilística é feita pelo *software* Rt, desenvolvido por Mahsuli & Haukaas (2013) na UBC (*University of British Columbia*). O Rt efetua análises de confiabilidade e otimização usando vários modelos probabilísticos. Para a análise de confiabilidade, o programa permite o uso dos métodos FORM, SORM, e simulação de Monte Carlo. Para a análise de confiabilidade deste trabalho, é adotado o método SORM pelo baixo tempo computacional e pela maior precisão em relação ao método FORM.

## 4.2 Abordagem pela análise dos esforços solicitantes

Nesta abordagem são estudadas diferentes maneiras de modelar pilares internos em lajes lisas e como obter os esforços solicitantes para cálculo da punção por diferentes métodos de análise estrutura. A análise dos esforços nos pilares internos é apresentada segundo diferentes modelos pelo Método dos Elementos Finitos, Processo de Analogia de Grelha e métodos dos Pórticos Equivalentes.

No Método dos Elementos Finitos, os pilares foram modelados de sete modos diferentes:

- apoio pontual com trecho rígido;
- apoio pontual;
- carga distribuída no perímetro da face do pilar;
- carga distribuída no plano médio da laje;
- pilar como elemento sólido;

- 4 apoios pontuais;
- 4 molas.

Pelo processo de Analogia de Grelha, os pilares foram modelados de seis modos diferentes:

- apoio pontual com trecho rígido;
- como apoio pontual;
- carga distribuída no perímetro da face do pilar;
- carga distribuída no plano médio da laje;
- 4 apoios pontuais;
- 4 molas.

Pelo Método dos Pórticos Equivalentes, os esforços foram obtidos pelos modelos propostos pelas seguintes normas:

- NBR 6118;
- ACI;
- Eurocode.

O Quadro 4.2 apresenta a identificação de cada modelo adotada nos resultados.

**Quadro 4.2 – Identificação dos diferentes modelos para os pilares internos nos casos de estudo**

Modelo		Id
MEF	Trecho Rígido (Referência)	1
	Pontual	2
	Carga distribuída	3
	Carga distribuída no plano médio da laje	4
	Sólido	5
	4 Barras	6
	4 Molas	7
AG	Trecho Rígido	8
	Pontual	9
	Carga distribuída	10
	Carga distribuída no plano médio da laje	11
	4 Barras	12
	4 Molas	13
MPE	NBR	14
	ACI	15
	EC	16

#### 4.2.1 Análise de sensibilidade para definição dos casos de estudo para estudo dos esforços

De acordo com Sherif & Dilger (2000), Enochsson (2001), Rashed (2004), Rombash (2004), Puel (2009), Skorpen & Dekker (2014), entre outros apresentados no capítulo 3, a maior variabilidade devido aos modelos encontrada em lajes apoiadas diretamente nos pilares está no momento negativo e o momento desbalanceado sobre os pilares. De acordo com os mesmos autores, o esforço normal de reação do pilar não apresenta grandes variabilidades, independentemente do modelo que se adota.

Portanto, de forma a maximizar a influência dos momentos desbalanceados na parcela da equação do estado limite último  $g(x)$  para os estudos de variabilidade entre os modelos e métodos, estudou-se a variação da proporção dos lados  $c_1/c_2$  em pilares com diferentes áreas de seção transversal, suportando lajes com diferentes espessuras, variando também a excentricidade das cargas. Assim, pode-se analisar qual seria a melhor proporção de lados  $c_1/c_2$  para amplificar as diferenças entre os momentos desbalanceados em função dos modelos. As Figuras 4.14 a 4.17 apresentam a influência de  $c_1/c_2$  na participação do momento em um eixo na tensão solicitante da verificação da punção em função de  $\alpha$ , dado por:

$$\alpha(\%) = \frac{\left(\frac{K.e}{W_p.d}\right)}{\left(\frac{1}{u.d} + \frac{K.e}{W_p.d}\right)} \cdot 100 \quad [eq. 4.14]$$

onde  $\alpha$  é a participação do momento desbalanceado na tensão solicitante total de punção, e  $c_1/c_2$  segue a mesma definição do Quadro 2.1 deste trabalho. A fórmula do coeficiente  $\alpha$  [eq. 4.14] é proveniente da [eq. 2.4], que é a fórmula que fornece as tensões solicitantes de punção pela NBR 6118/14. Percebe-se, pela [eq. 4.14], que os resultados são independentes do valor de  $F_{sd}$ . O Quadro 4.3 apresenta a área da seção dos pilares (A) e a altura útil das lajes (d) nos casos analisados.

**Quadro 4.3 – Casos estudados na análise de sensibilidade**

	A pilar (cm <sup>2</sup> )	d laje (cm)
<b>Caso 1</b>	1000	26
<b>Caso 2</b>	2500	19
<b>Caso 3</b>	5000	12

Percebe-se que, para pilares com assimetria em apenas um dos eixos, quanto maior a relação  $c_1/c_2$ , maior a participação do momento na tensão solicitante de punção. Já no caso de pilares com igual assimetria nos dois eixos, os momentos em pilares quadrados (relação  $c_1/c_2 = 1$ ) têm uma participação maior na tensão solicitante de punção que outras configurações (Figuras 4.16 e 4.17).

A excentricidade das cargas não influencia na participação da relação  $c_1/c_2$ , assim como nos diferentes casos. Claramente a participação do momento é maior para maiores excentricidades  $e$ , no entanto a inclinação das relações  $\left(\frac{c_1}{c_2} \times \alpha\right)$  não apresenta variações significativas entre excentricidades de 1cm e 15cm.

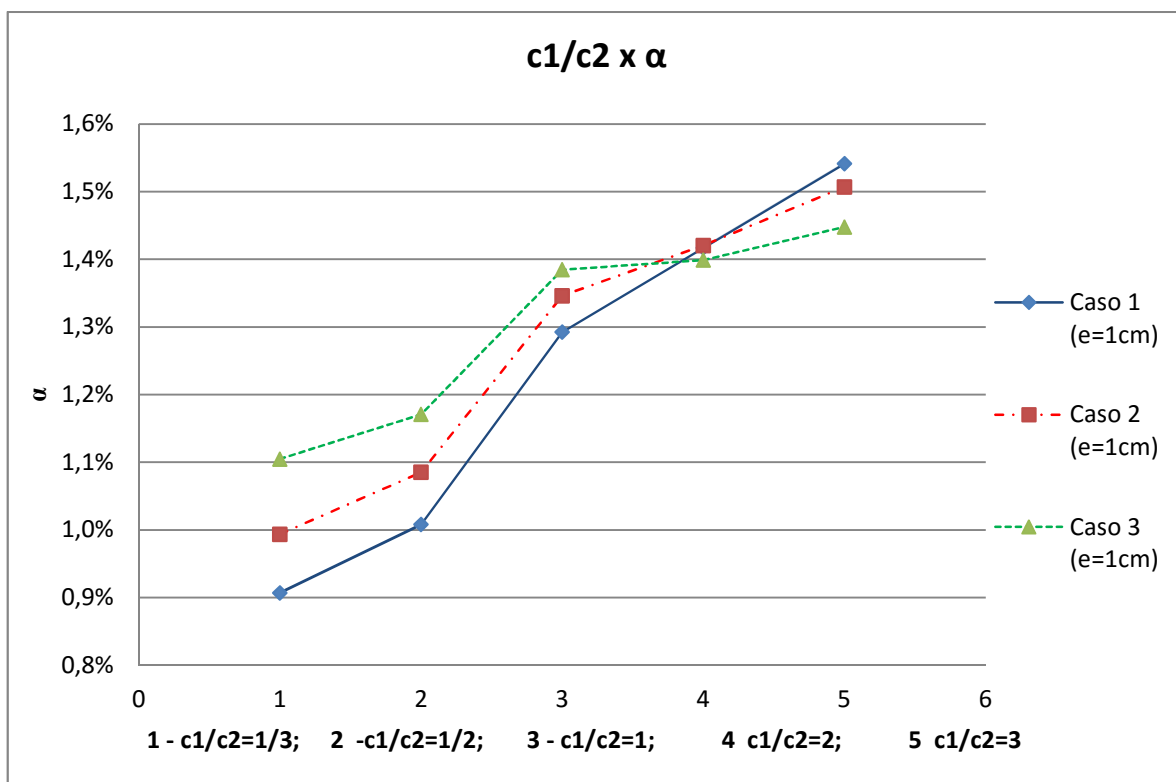


Figura 4.14 – Influência de  $c_1/c_2$  para uma excentricidade de 1 cm em um dos eixos

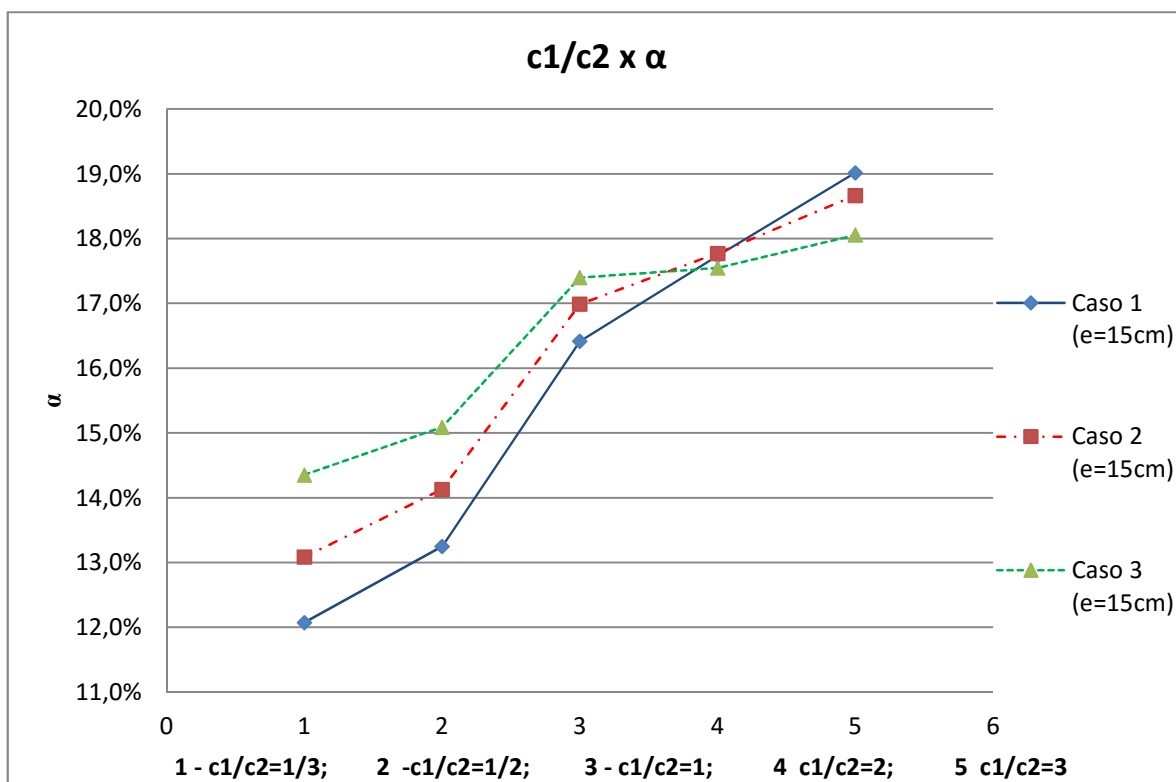


Figura 4.15 – Influência de  $c_1/c_2$  para uma excentricidade de 15 cm em um dos eixos



As Figuras 4.16 e 4.17 apresentam a influência de  $c_1/c_2$  na participação do momento atuando em dois eixos na tensão solicitante da verificação da punção.

O Caso 3 aumenta  $\alpha$  em relação ao Caso 2, e este em relação ao Caso 1 para situações onde  $\frac{c_1}{c_2} = 1$ . Portanto, quanto maior a altura útil da laje em relação à área do pilar, maior a participação do momento para pilares quadrados, dada uma mesma excentricidade da carga.

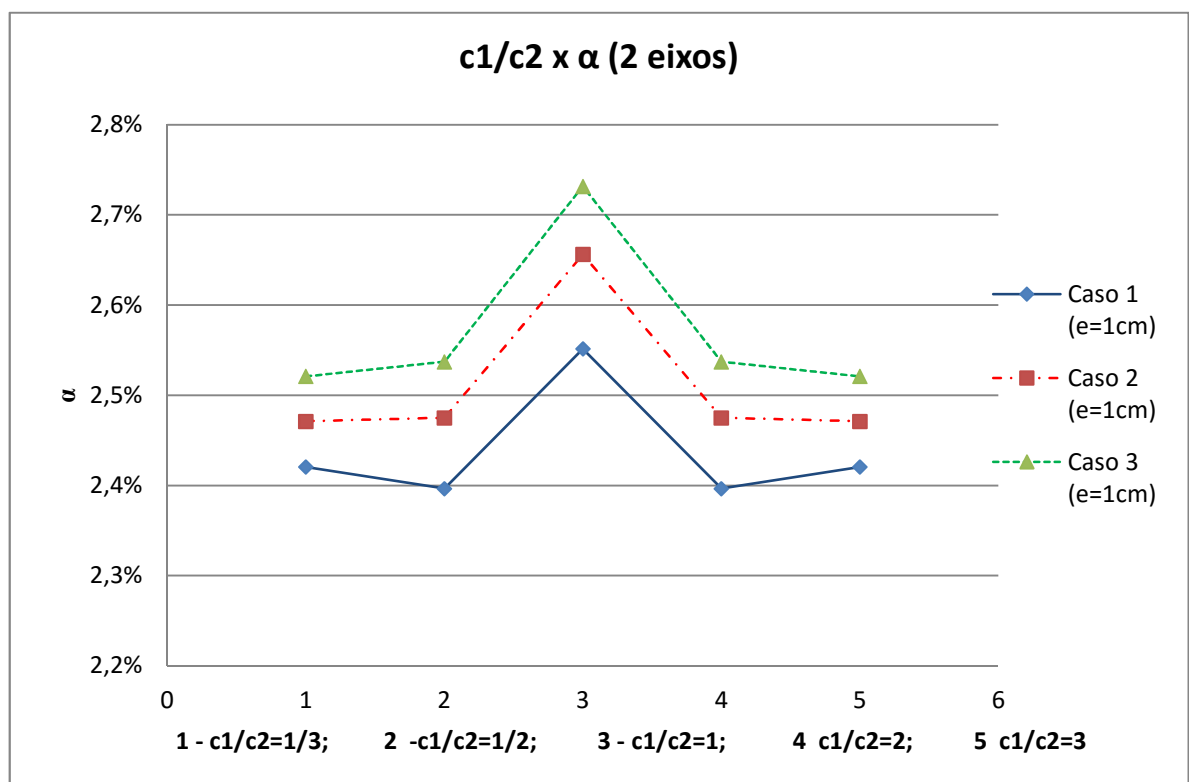


Figura 4.16 – Influência de  $c_1/c_2$  para uma excentricidade de 1 cm nos dois eixos

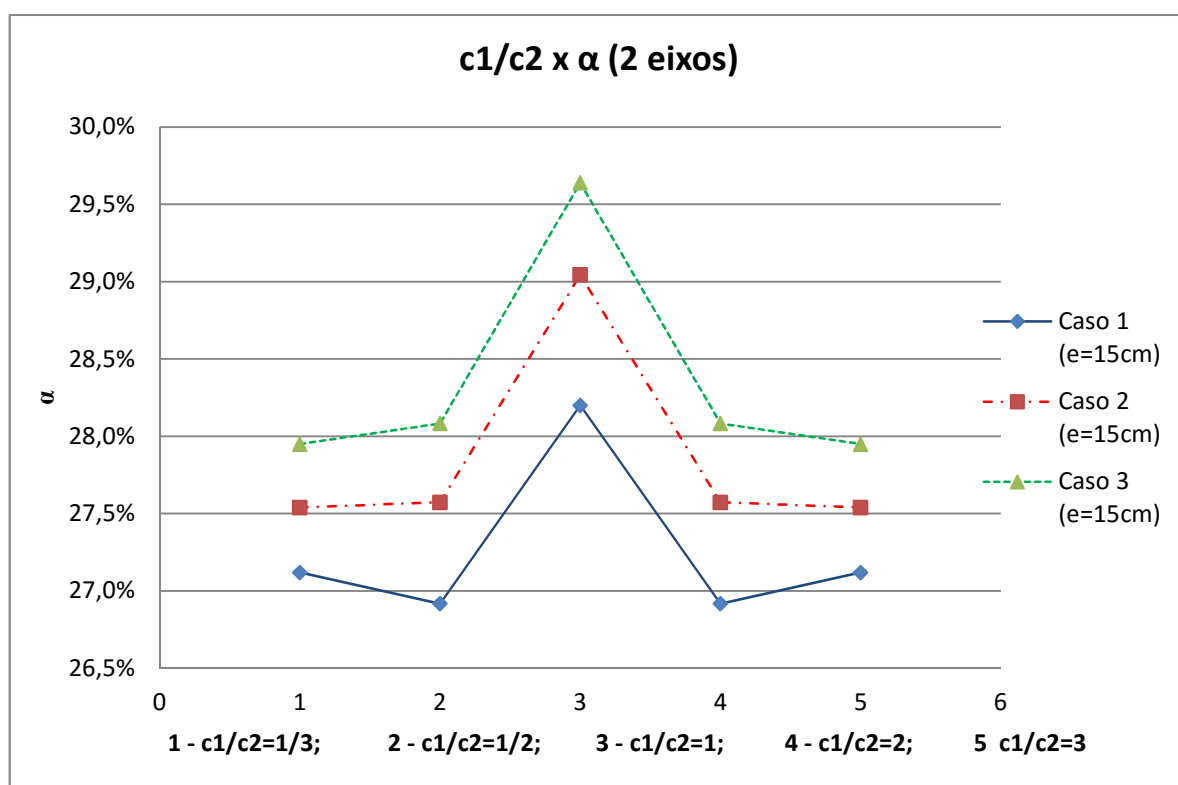


Figura 4.17 – Influência de  $c_1/c_2$  para uma excentricidade de 15 cm nos dois eixos

Outros fatores relevantes na configuração de lajes, que podem levar a uma maior ou menor influência do momento desbalanceado na verificação da punção são exibidos nas Figuras 4.18 a 4.20.

A Figura 4.18 apresenta o valor de  $e$  em função do aumento da rigidez do pilar, mantendo a rigidez da laje constante. Na Figura 4.19,  $e$  é apresentado em função da assimetria da posição de um pilar interno com relação a posição em planta do centro de uma laje quadrada. Na Figura 4.20,  $e$  é dado em função do carregamento para uma mesma configuração de laje.

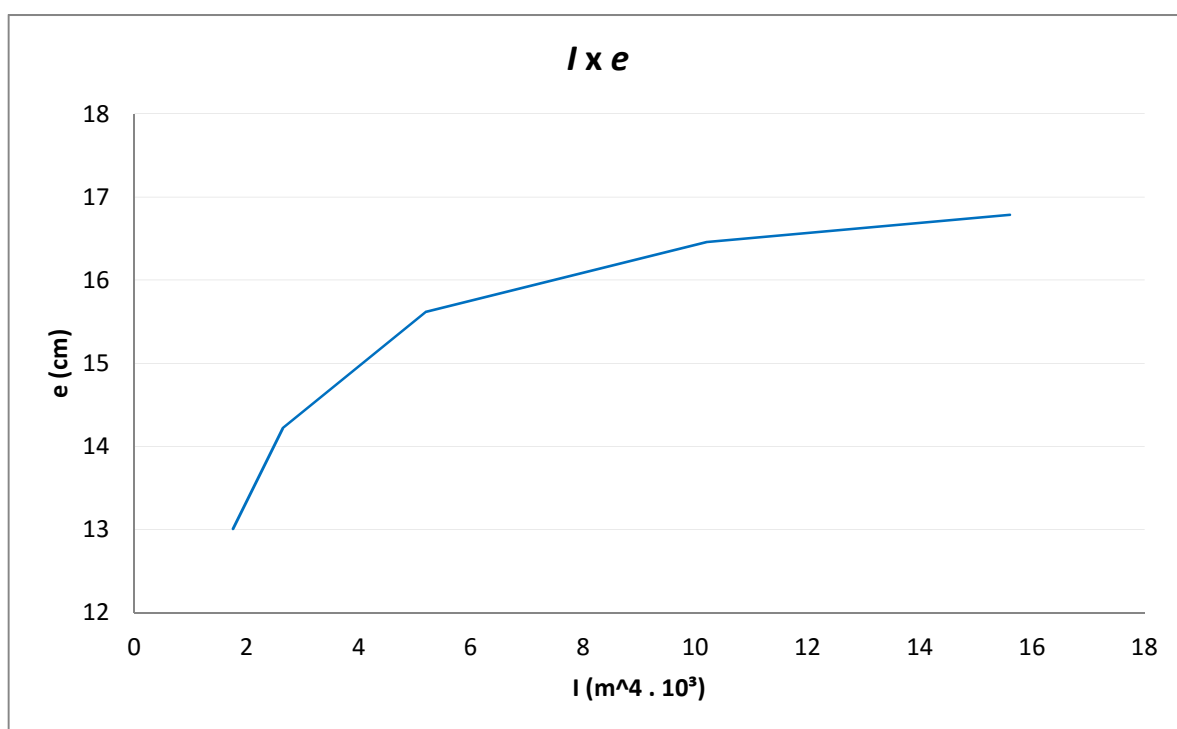


Figura 4.18 – Influência do momento de inércia do pilar na excentricidade da reação do pilar

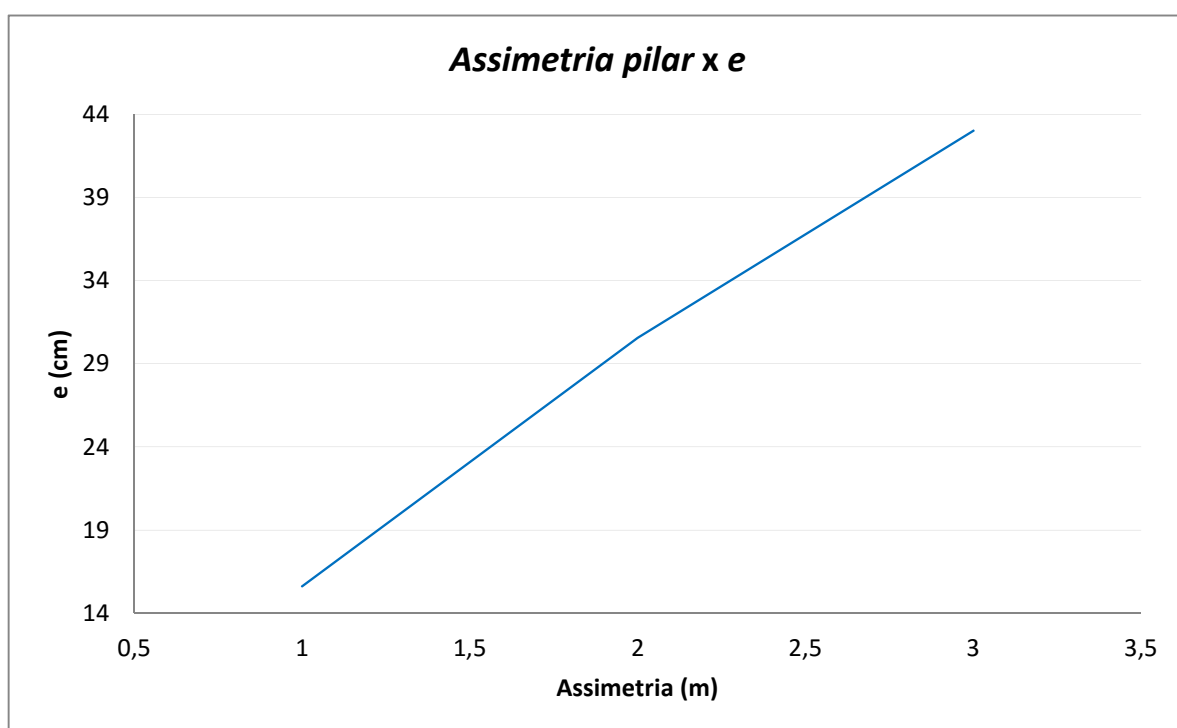
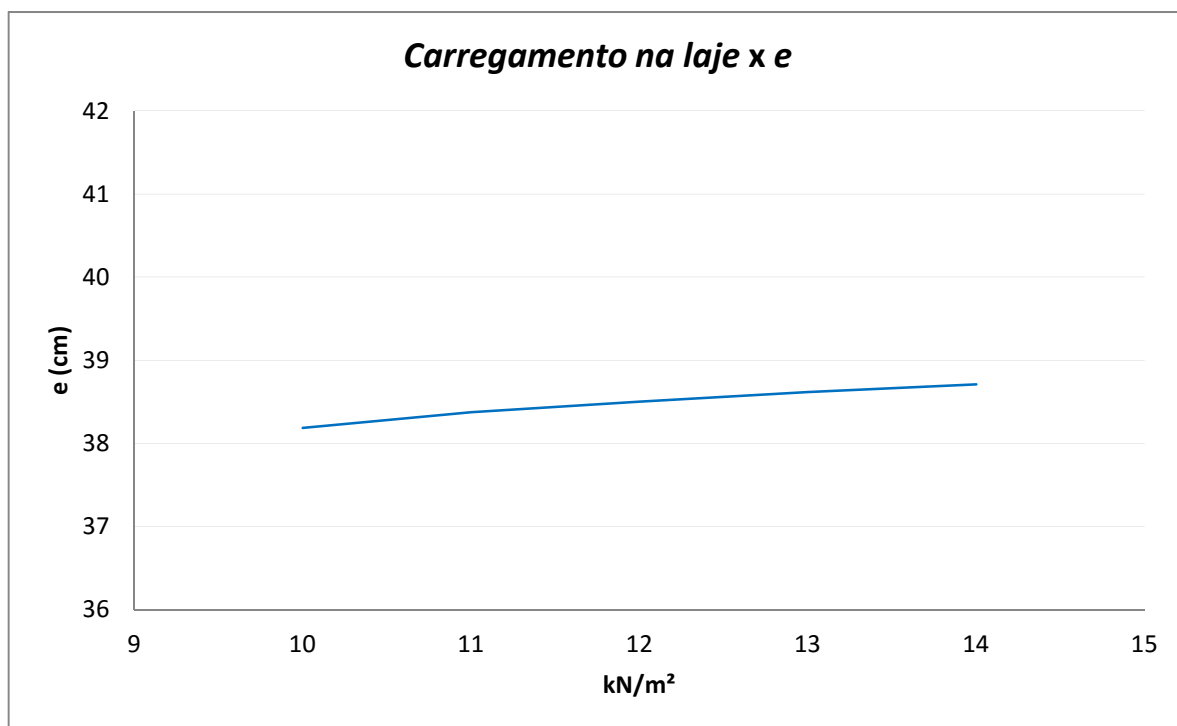


Figura 4.19 – Influência da assimetria do pilar em relação ao centro da laje na excentricidade da reação do pilar



**Figura 4.20 – Influência do carregamento total da laje na excentricidade da reação do pilar**

Percebe-se que, conforme se aumenta a rigidez de um pilar em relação à uma laje mantendo as mesmas dimensões, aumenta-se também o seu momento fletor em relação ao seu esforço normal. O mesmo pode ser observado nos casos onde houve aumento da assimetria da posição do pilar em relação ao centro da laje em planta. Já no caso do aumento do carregamento, no exemplo estudado não houve uma participação crescente da excentricidade da reação do pilar. Por se tratarem de análises elástico lineares, é esperado que uma maior rigidez do pilar resulte em maiores esforços de momentos fletores, assim como maiores assimetrias aumentem a participação do momento em relação à reação do pilar. Quanto ao aumento do carregamento, mantendo-se relações lineares de carga e rigidezes constantes, o aumento nos momentos fletores negativos são proporcionais ao aumento dos esforços normais nos pilares, o que não aumentaria a participação do momento desbalanceado nas tensões solicitantes na verificação da punção.

#### **4.2.2 Casos de estudo para a análise dos esforços**

Baseando-se nos dados observados nas Figuras 4.14 a 4.20, quatro configurações de laje foram elaboradas de tal maneira que fosse possível focar em algumas situações onde os momentos fletores transmitidos ao pilar tenham uma relevância maior na tensão solicitante da verificação da punção em relação aos outros casos.

A Figura 4.21 e o Quadro 4.4 apresentam as dimensões da laje e as posições dos pilares internos adotados neste trabalho.

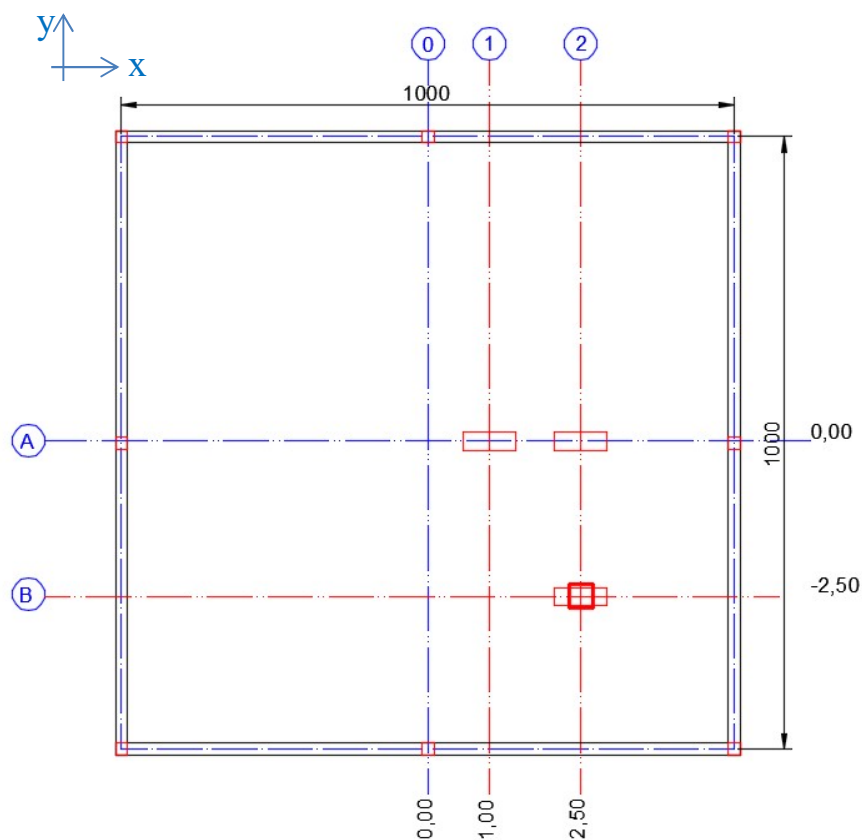


Figura 4.21 – Configuração da laje para os estudos de variabilidade de pilares internos

Os pilares com proporção entre lados  $c_1/c_2$  igual a 3 são analisados nas posições A1, A2 e B2. Já o pilar quadrado ( $c_1/c_2 = 1$ ) será analisado na posição B2. Apesar de os momentos terem uma maior representatividade na tensão solicitante de punção nos pilares quadrados em relação aos retangulares quando há assimetria nos dois eixos (para uma mesma configuração de laje), a rigidez do pilar também aumenta a excentricidade da carga do pilar, motivo pelo qual serão analisados estes dois pilares na posição B2.

Adotou-se uma laje quadrada com dimensões de 10 m x 10 m com vigas de borda de seção 20cm x 50cm, suportadas por pilares com dimensões 20 cm x 20 cm.

Quadro 4.4 – Dimensões e nomenclatura dos pilares internos

Pilar	Dimensões		Assimetria do pilar	
	x (cm)	y (cm)	x (cm)	y (cm)
A1-R	86,5	29,0	100	0
A2-R	86,5	29,0	250	0
B2-Q	50,0	50,0	250	250
B2-R	86,5	29,0	250	250

Definiram-se 4 casos de estudo, cuja posição dos pilares internos é informada pelo Quadro 4.4. A área da seção transversal dos pilares foi mantida em aproximadamente 2500 cm<sup>2</sup>. Para cada caso de estudo analisado foram elaborados os 16 modelos identificados pelo Quadro 4.2, onde as características das lajes e seus carregamentos são incluídos no item 4.2.3.

#### 4.2.3 Descrição dos modelos

As análises elástico lineares dos esforços solicitantes são feitas usando o programa SAP2000, onde as estruturas serão analisadas pelo Método dos Elementos Finitos, pelo Processo por Analogia de Grelha e os Métodos dos Pórticos Equivalentes. Para a análise por elementos finitos, adotou-se os elementos de placa do tipo *plate thin*. Na análise por analogia de grelha, a laje foi modelada por barras cruzando-se entre si, cuja seção transversal é idêntica ao trecho que ela representa, e a relação  $J/I$  é dada em função do momento de inércia, cujo valor adotado é igual a 2.

O lançamento dos pilares é feito conforme o modelo de viga contínua proposto na NBR 6118, onde se consideram as extremidades do pilar simplesmente apoiadas, considerando metade da sua altura para cima e para baixo (Figura 4.22).

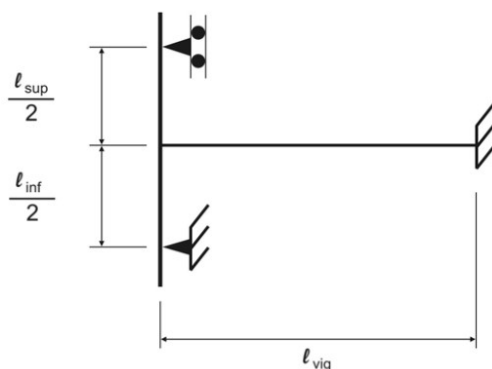


Figura 4.22 – Esquema adotado para a modelagem dos pilares (NBR 6118 /14)

No nó superior adota-se um apoio do primeiro gênero, onde são restringidas as translações nas direções dos eixos X e Y (plano da laje), deixando todas as rotações livres. No nó inferior dos pilares, adota-se um apoio do segundo gênero, com restrição à translação nos três eixos e liberdade de rotação também nos três eixos principais. A Figura 4.23 apresenta um modelo genérico no programa SAP2000. São adotadas vigas de bordo com dimensão 20x50 cm e pilares de borda e de canto com seção 20 x 20 cm. O Quadro 4.5 expõe os dados de carregamentos, altura  $h$  da laje e propriedades do concreto utilizadas para os quatro casos de estudo em função da localização do pilar. Considerou-se o peso específico do concreto armado igual a 25 kN/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson igual a 0,2.

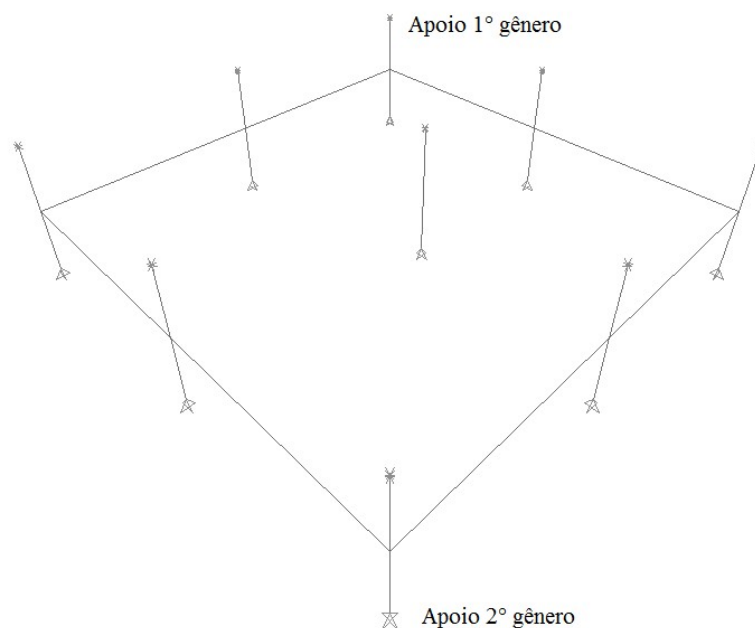


Figura 4.23 – Modelo numérico genérico da laje

Quadro 4.5 – Nomenclatura de pilares internos

Caso de estudo (Pilar)	Altura h da laje (cm)	$f_{ck}$ (MPa)	$E_{cs}$ (GPa)	Ações permanentes (kN/m <sup>2</sup> )	Ações acidentais (kN/m <sup>2</sup> )
A1-R	16	30	27	5	2
A2-R	16	40	32	5	2
B2-Q	20	35	29	5	2
B2-R	20	35	29	5	2

Para definir o espaçamento da malha a ser adotada nos casos de estudo, fizeram-se dois estudos do caso do pilar A1-R: um com malha de 6x6cm e outro com malha de 50x50cm. A dispersão dos esforços obtidos pelos 16 modelos normalizados em relação aos valores obtidos do modelo de pilar como apoio pontual com trecho rígido no MEF (modelo 1) são visualizados nas Figuras 4.24 e 4.25.

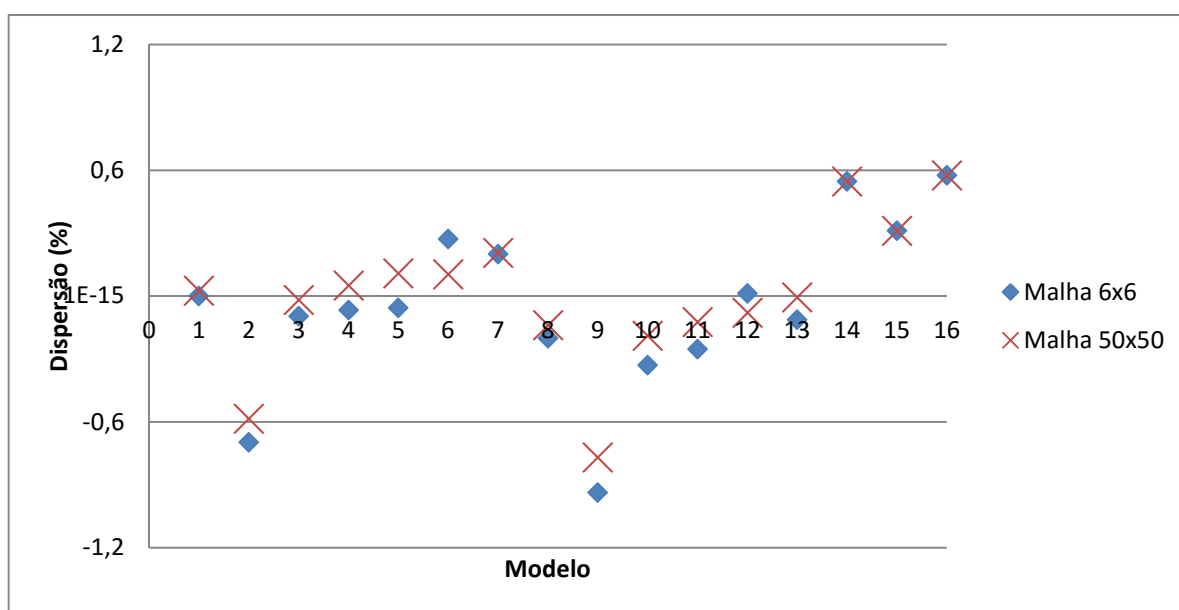


Figura 4.24 – Dispersão dos momentos desbalanceados dos diversos modelos na configuração de laje A1-R

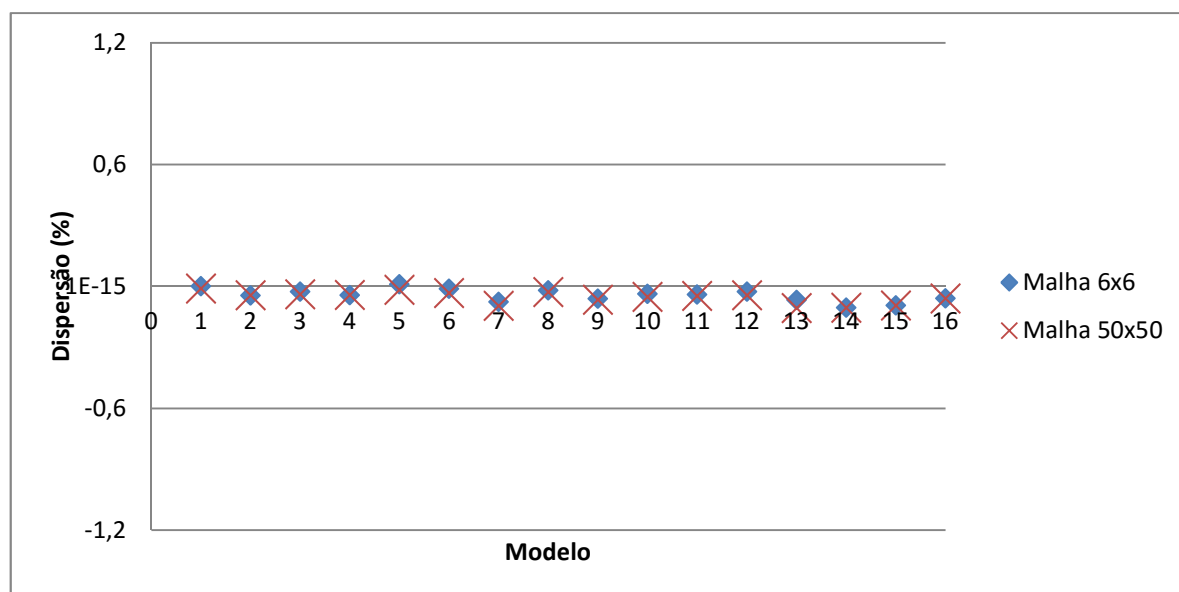


Figura 4.25 – Dispersão da força de reação do pilar dos diversos modelos na configuração de laje A1-R

Percebe-se que a força de reação do pilar não sofre a mesma influência do refinamento na malha que os momentos desbalanceados. Aparentemente, o maior refinamento da malha amplificaria as diferenças nas respostas obtidas por cada modelagem de pilar e método de análise. Desta forma, optou-se por adotar os modelos com malhas com espaçamento 6x6cm, de tal maneira que as respostas dos pilares internos fossem mais caracterizada pela modelagem destes pilares.



#### 4.2.4 Variabilidades, EMU e análise de confiabilidade

Para analisar as variabilidades dos esforços solicitantes N e M concomitantemente, elaborou-se uma função  $h_\delta$  que fornece a tensão solicitante tendo os esforços dos 16 modelos como variáveis independentes. Ainda, para verificar a dispersão dos resultados, normalizou-se a equação pelo valor da tensão solicitante obtida para o modelo 1. Assim, utiliza-se a [eq. 2.4] - dependente de N e M - dividida pelo valor de  $\tau_{sd}$  obtido do modelo 1.

Portanto,  $h_\delta$  será uma variável dependente de três variáveis independentes, que são a força de reação do pilar N e os momentos desbalanceados dos pilares  $M_y$  e  $M_x$ . Para que fosse facilitada a plotagem dos resultados em um gráfico, faz-se uma regressão linear múltipla, cuja função é dada por:

$$h_\delta(N, M_y, M_x) = a_1 + a_2 \cdot N + a_3 \cdot M_y + a_4 \cdot M_x \quad [eq. 4.15]$$

onde:

$a_1$  - coeficiente linear de  $h_\delta$ ;

$a_2$  - coeficiente angular de N (Força de reação do pilar);

$a_3$  - coeficiente angular de  $M_y$  (Momento desbalanceado em torno do eixo y);

$a_4$  - coeficiente angular de  $M_x$  (Momento desbalanceado em torno do eixo x);

Desta forma são obtidos 16 valores de tensão solicitante (um para cada modelo) normalizados em relação à tensão solicitantes do modelo 1, e para cada valor de N,  $M_y$  e  $M_x$  tem-se um valor de  $h_\delta$  correspondente. Procedendo à regressão linear múltipla, obtém-se a equação de  $h_\delta(N, M_y, M_x)$ . A apresentação dos gráficos de  $h_\delta(N, M_y, M_x)$  é feita considerando as variáveis independentes duas a duas, usando o *software Online 3-D Function Grapher* da *LivePhysics*. O intervalo de plotagem é definido pela média dos valores dos esforços dos modelos considerados, mais ou menos 2 desvios padrão. Desta forma, considerando que os valores se ajustam a uma distribuição normal, 95,5% dos valores estariam contidos neste intervalo. Por serem oriundos da [eq. 2.4], os resíduos de  $h_\delta(N, M_y, M_x)$  são nulos, e portanto toda variabilidade é dada em função da variabilidade dos esforços.

Para o cálculo de confiabilidade considerando a variabilidade dos esforços solicitantes, é calculada a variável incerteza de modelo  $\lambda_{\delta 1}$ . O valor de  $\lambda_{\delta 1}$  refere-se ao EMU dado em função da variação das tensões solicitantes obtidas pela [eq. 2.4] quando se inserem os valores dos esforços solicitantes de cada modelo. Portanto são inseridas a força de reação do pilar e o momento desbalanceado obtidos por cada um dos dezesseis modelos na [eq. 2.4], e se encontra a tensão solicitante de punção para cada um dos 16 modelos. A tensão solicitante do modelo 1, modelo com trecho rígido, será considerada a tensão real ou de referência  $R_\delta$ . A opção por este modelo como sendo o de referência é discutida no item 4.1.2. Dividindo cada uma das demais tensões pela tensão

$R_\delta$  e adequando os valores a uma função de distribuição de probabilidades encontram-se uma média e um desvio padrão para aquela variável aleatória  $\lambda_{\delta 1}$ .

Portanto, nesta primeira abordagem, as incertezas de modelo são levadas em conta de duas maneiras:

- $g'_1(x)$  - considerando o erro de modelo  $\Theta_1$  proposto pelo JCSS;
- $g'_2(x)$  - considerando o EMU  $\lambda_{\delta 1}$  em função das variabilidades nas tensões solicitantes;

As equações de estado limite usadas no cálculo de confiabilidade com consideração de incerteza de modelo são apresentadas abaixo:

$$g'_1(x) = \Theta_1 \cdot \xi \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} - (N_G + N_Q) \cdot \left(\frac{1}{u \cdot d} + \frac{K \cdot e}{w_p \cdot d}\right) \quad [eq. 4.16]$$

$$g'_2(x) = \lambda_{\delta 1} \cdot \xi \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} - (N_G + N_Q) \cdot \left(\frac{1}{u \cdot d} + \frac{K \cdot e}{w_p \cdot d}\right) \quad [eq. 4.17]$$

### 4.3 Abordagem pela análise das tensões solicitantes no perímetro crítico $c'$ da NBR 6118/14

Nesta segunda abordagem, pretende-se estudar as tensões solicitantes de cisalhamento ao longo do perímetro crítico de modo a compará-las com as tensões solicitantes de punção fornecidas pelas equações da NBR 6118/14. Deste modo, pretende-se verificar a distribuição de tensões de cisalhamento no perímetro crítico em alguns casos, segundo uma análise em regime elástico-linear, além de analisar diferentes modelagens de pilar com várias configurações de carregamentos e indicar os modelos que melhor representam as tensões obtidas pela NBR 6118/14. Cabe salientar que estudou-se apenas o perímetro crítico  $c'$  a  $2d$  da face do pilar quando não existe armadura de punção.

A verificação da punção com momentos desbalanceados pela NBR 6118/14 assume que as tensões de cisalhamento provocadas pelo momento possuem valor constante com uma distribuição uniforme à distância  $2d$  da face do pilar, como é mostrado na Figura 4.26. Modelando-se uma ligação laje pilar pelo método dos elementos finitos, é possível encontrar a distribuição das tensões de cisalhamento no perímetro crítico, onde uma seção transversal neste perímetro crítico pode fornecer os esforços cortantes obtidos por uma análise linear. Neste trabalho optou-se por adotar a altura útil da laje para chegar às tensões solicitantes de cisalhamento, de modo a se obterem tensões maiores que as que seriam obtidas usando a espessura  $h$  da laje. Desta forma se reduziria uma possibilidade de tendência contra a segurança dos valores calculados das tensões pelo modelo numérico. Além disso, os resultados obtidos por Bolviken (2013), quando esta adotou a altura útil da laje para encontrar as tensões solicitantes de cisalhamento, aproximou os valores obtidos no modelo numérico aos fornecidos pela fórmula de tensões solicitantes do EC/04, que é bastante semelhante à fórmula da NBR 6118/14. A metodologia desta segunda abordagem foi adaptada de Bolviken (2013).

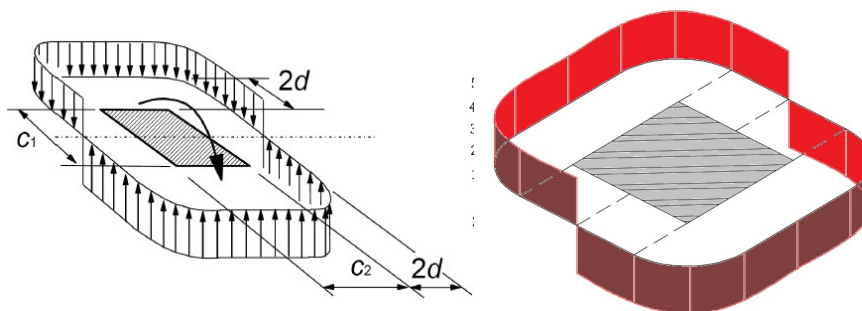
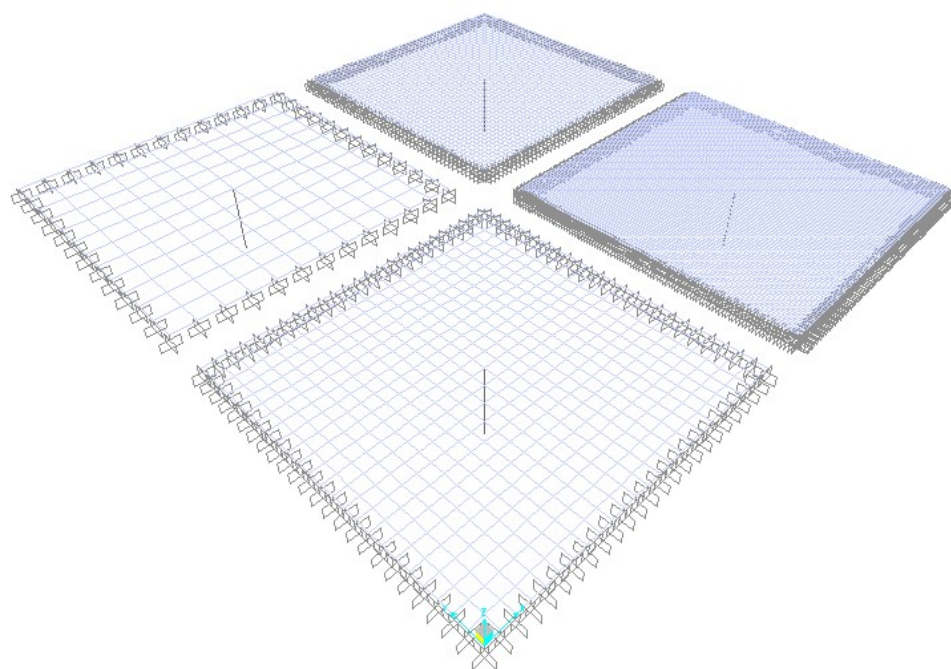


Figura 4.26 – Tensões de cisalhamento uniformemente distribuídas no perímetro crítico

#### 4.3.1 Descrição do modelo simplificado da laje

O modelo simplificado da laje é restringido à rotação e translação nas quatro bordas, o que simula simetria em uma laje com vãos entre pilares igual ao dobro da distância entre o pilar e a borda do modelo. O pilar é ligado à laje em uma extremidade e livre na outra, onde são aplicados o carregamento vertical para a força normal e os carregamentos horizontais para os momentos no

pilar. Na laje é usado o elemento quadrilátero de casca *shell* de quatro nós para obtenção dos esforços. A Figura 4.27 apresenta o modelo no SAP 2000. Este modelo simplificado permite que a relação entre os esforços solicitantes (N e M) e os esforços de cisalhamento obtidos no perímetro crítico seja facilitada, por já serem conhecidos os esforços solicitantes (N e M) - e portanto as tensões solicitantes de tensão obtidas pela [eq. 2.4] proveniente da NBR 6118/14 - antes de sua aplicação.



**Figura 4.27 – Modelos para análise das tensões de cisalhamento no perímetro crítico**

No modelo são definidos pontos ao redor do perímetro a 2d da face do pilar para simplificar a obtenção dos esforços cortantes, no entanto, para algumas modelagens de pilar foram necessários maiores refinamento na área de contato do pilar com a laje. Foram determinados 16 pontos para medição dos esforços cortantes nos modelos ao longo do perímetro de controle, conforme Figura 4.28. Os esforços cortantes nos trechos retos do perímetro são obtidas diretamente do modelo numérico. Nos trechos circulares são encontradas as componentes dos valores dos esforços cortantes obtidos em cada um dos eixos usando a equação  $V_{xz} \cdot \sin(45^\circ) + V_{yz} \cdot \cos(45^\circ)$ , onde  $45^\circ$  é o ângulo formado pelo ponto analisado e o eixo medido.

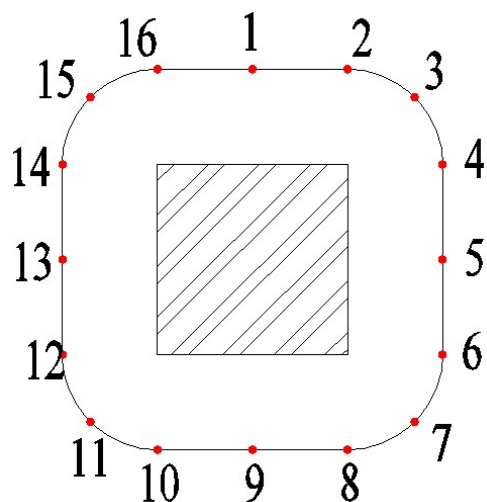


Figura 4.28 – Pontos ao longo do perímetro de controle para obtenção dos esforços cortantes

O Quadro 4.6 apresenta os parâmetros usado no modelo do SAP 2000.

Quadro 4.6 – Parâmetros da laje

Parâmetro	Valor	Unidade
Comprimento na direção x	5,0	m
Comprimento na direção y	5,0	m
Comprimento do pilar	1,5	m
Módulo de Elasticidade E	27	GPa
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,2	-

#### 4.3.2 Modelos de análise

Os pilares foram modelados de seis modos diferentes, todos pelo método dos elementos finitos. Foram feitas análises variando a altura das lajes, a proporção dos lados dos pilares (mantendo a mesma área de seção transversal), o refinamento da malha, a força normal no pilar e o momento desbalanceado, totalizando 778 modelos.

Os Quadros 4.7 e 4.8 apresentam as configurações adotadas para a segunda abordagem do presente estudo. A modelagem dos pilares foi feita seguindo as prescrições do item 4.1.1. A área do pilar foi mantida constante em 2500 cm<sup>2</sup>. Os valores obtidos dos esforços cortantes são transformados em tensões solicitantes dividindo-os pela altura útil da laje. Estas tensões são então analisadas na forma de tensões médias e tensões máximas no perímetro crítico para cada modelo e parâmetro.

**Quadro 4.7 – Modelos de pilares adotados**

Modelo do pilar	Item
Pilar como apoio pontual e trecho rígido	4.1.1.1
Pilar como apoio pontual (modelo de barra)	4.1.1.2
Carga distribuída na face do pilar	4.1.1.3
Carga distribuída no eixo da laje	4.1.1.4
Pilar modelado com elementos sólidos	4.1.1.5
Pilar modelado como 4 barras	4.1.1.6

**Quadro 4.8 – Parâmetros variados nas análises**

Parâmetro	Valores
Espaçamento da malha. unidades em (cm x cm)	50x50; 25x25; 12x12; 6x6
Relação entre lados dos pilares ( $c_1/c_2$ )	1/2 ; 1/1 ; 2/1
Ações [ $N$ ; $M_y$ ; $M_x$ ]. (kN e kN.m)	[0;45;0]; [0;0;45]; [0;45;45] ;[225;45;0]; [225;45;45]; [450;0;0]; [0;450;0]
Altura útil $d$ [espessura da laje $h$ ]. (mm)	120 [160]; 160 [200]; 210 [250]; 260 [300]

### 4.3.3 EMU e análise de confiabilidade

A análise da variabilidade das tensões médias e máximas obtidas para cada modelagem de pilar são feitas em função das tensões obtidas pelas prescrições da NBR 6118/14. Desta forma são feitas duas etapas.

A primeira tem o foco em analisar de uma forma subjetiva o que se julga ser a modelagem usual na prática de projeto para análise da punção quando se usam as tensões solicitantes no perímetro crítico de um modelo numérico. São consideradas:

- as tensões **médias** obtidas por todos os modelos com malhas de 50x50cm e 25x25cm;
- as tensões **máximas** obtidas por todos os modelos com malhas de 50x50cm e 25x25cm;

Nesta primeira etapa não são discriminadas as modelagens dos pilares, levando em conta que não existem limitações normativas quanto à modelagem dos pilares. Da mesma forma consideraram-se apenas as malhas mais grossas, por conta do menor tempo de processamento, facilidade na modelagem e a ausência de limitações normativas. O impacto na segurança nesta primeira etapa é feita através do índice de confiabilidade  $\beta$  pelo método SORM. Definem-se então os EMU  $\lambda_{TA}$  e  $\lambda_{TB}$ , ajustando os valores das tensões solicitantes médias e máximas, respectivamente, obtidas em todas as modelagens em função das respectivas tensões solicitantes fornecidas pela NBR 6118/14 (conforme item 4.1.2) a uma curva de distribuição de probabilidades, com uma média e um desvio padrão.

A segunda etapa tem como finalidade verificar quais modelagens de pilar e qual refinamento de malha fornecem resultados que melhor se ajustam aos fornecidos pela NBR

6118/14. A adequabilidade do modelo e malha são analisado através do impacto na segurança pelo índice de confiabilidade  $\beta$  obtido pelo método SORM. Definem-se então os EMU  $\lambda_{ti}$ , ajustando os valores das tensões solicitantes médias e máximas, respectivamente, obtidas para cada modelagem de pilar e cada refinamento de malha em função das respectivas tensões solicitantes fornecidas pela NBR 6118/14 (conforme item 4.1.2) a uma curva de distribuição de probabilidades, com uma média e um desvio padrão. Desta forma são selecionados os modelos que apresentam o EMU com média mais próxima de 1 e desvio padrão mais próximo de 0 para a análise de confiabilidade.

A equação do estado limite usada é a definida pela [eq. 4.12], e as incertezas de modelo EMU são levadas em conta na equação de estado limite das seguintes maneiras:

- $g'_1(x)$  - considerando o erro de modelo  $\Theta_1$  proposto pelo JCSS;
- $g'_{\tau A}(x)$  - considerando o EMU  $\lambda_{\tau A}$  em função das variabilidades nas tensões solicitantes médias;
- $g'_{\tau B}(x)$  - considerando o EMU  $\lambda_{\tau B}$  em função das variabilidades nas tensões solicitantes máximas;
- $g'_{ti}(x)$  - considerando o EMU  $\lambda_{ti}$  em função das variabilidades nas tensões solicitantes por cada modelagem de pilar e cada refinamento de malha;

As equações de estado limite usadas no cálculo de confiabilidade com consideração de incerteza de modelo são apresentadas abaixo:

$$g'_1(x) = \Theta_1 \cdot \xi \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} - (N_G + N_Q) \cdot \left(\frac{1}{u \cdot d} + \frac{K \cdot e}{w_p \cdot d}\right) \quad [eq. 4.18]$$

$$g'_{\tau A}(x) = \lambda_{\tau A} \cdot \xi \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} - (N_G + N_Q) \cdot \left(\frac{1}{u \cdot d} + \frac{K \cdot e}{w_p \cdot d}\right) \quad [eq. 4.19]$$

$$g'_{\tau B}(x) = \lambda_{\tau B} \cdot \xi \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} - (N_G + N_Q) \cdot \left(\frac{1}{u \cdot d} + \frac{K \cdot e}{w_p \cdot d}\right) \quad [eq. 4.20]$$

$$g'_{ti}(x) = \lambda_{ti} \cdot \xi \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{\frac{1}{3}} - (N_G + N_Q) \cdot \left(\frac{1}{u \cdot d} + \frac{K \cdot e}{w_p \cdot d}\right) \quad [eq. 4.21]$$

## 5 *Estudo dos esforços solicitantes para verificação da punção*

Nesta primeira abordagem do trabalho, são analisados os quatro casos de estudo, identificados pela localização e formato do pilar interno. Para cada caso de estudo são exibidos os esforços solicitantes da força normal de reação do pilar ( $N$ ), momento desbalanceado em torno do eixo  $y$  ( $M_y$ ) e, para os casos com assimetria nos dois eixos, o momento desbalanceado em torno do eixo  $x$  ( $M_x$ ), para os dezesseis modelos definidos anteriormente. São mostrados histogramas da força de reação do pilar e de momento desbalanceado para os dezesseis modelos, indicando uma média em relação ao valor de referência (Modelo 1) para visualizar tendências das variabilidades dos esforços. Nestes histogramas,  $\mu$  é o valor esperado e a área hachurada compreende 2 desvios padrão para mais e 2 para menos da média (95,5% de probabilidade de um valor estar dentro deste intervalo), supondo uma distribuição normal.

Os EMUs são definidos ajustando funções de distribuição de probabilidade para  $\lambda_{\delta 1}$ . A análise de confiabilidade é feita em três etapas: inicialmente considerando todos os modelos; depois excluindo os modelos que mais se distanciam da média simples, que são os modelos supondo apoio pontual e os modelos que usam o método dos pórticos equivalentes.

Por fim são indicadas algumas conclusões acerca dos resultados desta primeira abordagem. Um diagrama do índice de confiabilidade em função de  $\alpha$  é apresentado, de forma a relacionar a participação do momento desbalanceado com o impacto na segurança na verificação da punção pela NBR 6118/14 em função da variabilidade nos resultados dos modelos.

### 5.1 Pilar interno A1-R

Neste primeiro caso de estudo, considera-se uma laje com vãos pouco diferentes e pilares dispostos ortogonalmente, supondo a possibilidade de usar o método dos pórticos equivalentes conforme recomendações da NBR 6118/14 e do EC2/04. O pilar é suposto como retangular de modo a amplificar o efeito do momento desbalanceado no cálculo da punção e também ter uma maior parcela dos momentos transferidos ao pilar pela maior inércia em torno de  $y$ .

#### 5.1.1 Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos

Foram analisados os 16 modelos segundo os parâmetros apresentados no capítulo 4. As forças de reação do pilar e os momentos desbalanceados, assim como as tensões solicitantes de punção obtidas pela NBR 6118/14 são apresentados no Quadro 5.1.



**Quadro 5.1 – Esforços e tensões para os diferentes modelos para o caso do pilar A1-R**

Modelo		Id	N (kN)	My (kN.m)	$\tau_{sd}$ (MPa)
MEF	Trecho Rígido (Referência)	1	244,8	47,6	0,96
	Pontual	2	233,8	14,4	0,75
	Carga distribuída	3	238,3	43,0	0,92
	Carga distribuída no plano médio da laje	4	234,3	44,4	0,92
	Sólido	5	247,2	44,9	0,96
	4 Barras	6	241,7	60,5	1,02
	4 Molas	7	226,0	57,1	0,96
AG	Trecho Rígido	8	239,6	37,9	0,90
	Pontual	9	229,5	7,3	0,68
	Carga distribuída	10	235,9	31,9	0,85
	Carga distribuída no plano médio da laje	11	235,0	35,6	0,87
	4 Barras	12	238,5	48,2	0,95
	4 Molas	13	228,6	42,2	0,89
MPE	NBR	14	219,2	73,6	1,03
	ACI	15	222,0	62,4	0,98
	EC	16	230,2	75,0	1,07

Pelo Quadro 5.1, os momentos desbalanceados obtidos pelos modelos numéricos considerando apoio pontual (modelos 2 e 9) mostram resultados bastante inferiores em relação aos demais modelos, conforme citado na literatura. Percebe-se que os momentos desbalanceados fornecidos pelo método dos pórticos equivalentes tendem a ser pouco maiores que os demais. Com relação às forças de reação dos pilares, não se observam diferenças muito grandes. O coeficiente  $\alpha$ , que fornece a participação percentual dos momentos desbalanceados na tensão solicitantes de punção pela NBR 6118/14, dado pela [eq. 4.14], é obtido em função do Modelo 1 e apresentado abaixo:

$$\alpha_{A1-R} = 26,3\%$$

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram os histogramas das forças de reação do pilar e dos momentos desbalanceados. Percebe-se, comparando o valor esperado entre os modelos com o valor de referência do Modelo 1, que existe uma tendência em se obterem valores menores que os de referência, tanto com relação à força de reação do pilar como dos momentos desbalanceados. Isso indicaria uma média contra a segurança em relação aos esforços de referência. Apesar da dispersão

aparentemente similar dos esforços nos diagramas das Figuras 5.1 e 5.2, proporcionalmente a variabilidade dos momentos desbalanceados é bastante superior a das forças de reação do pilar.

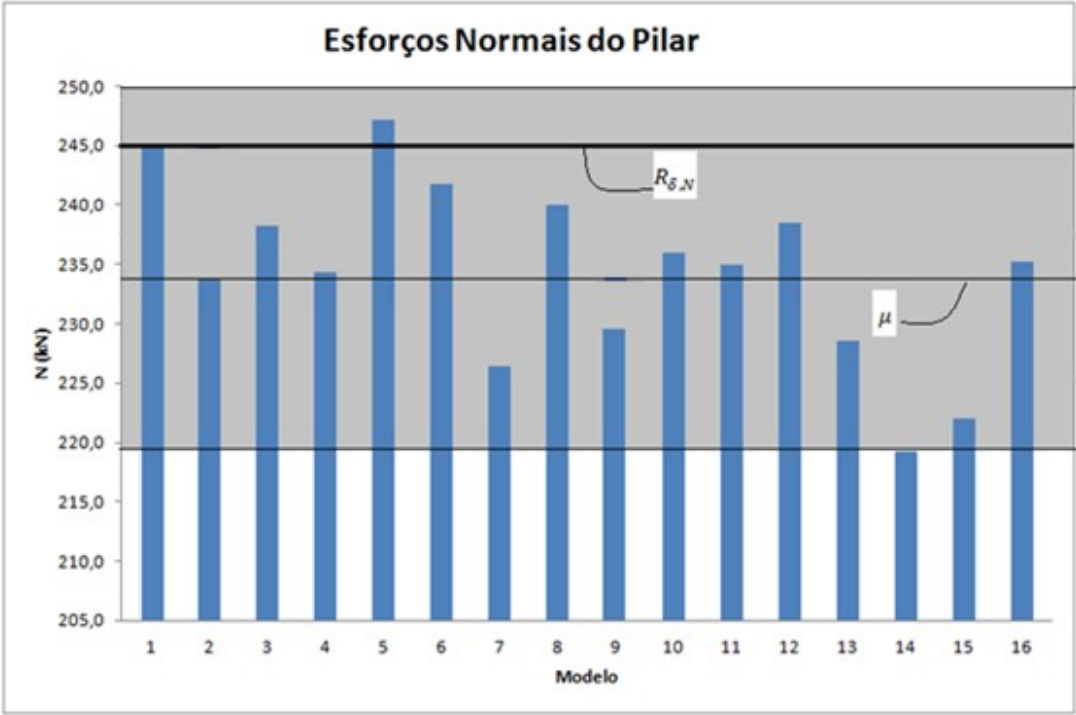


Figura 5.1 – Esforços normais do pilar para o caso do pilar A1-R

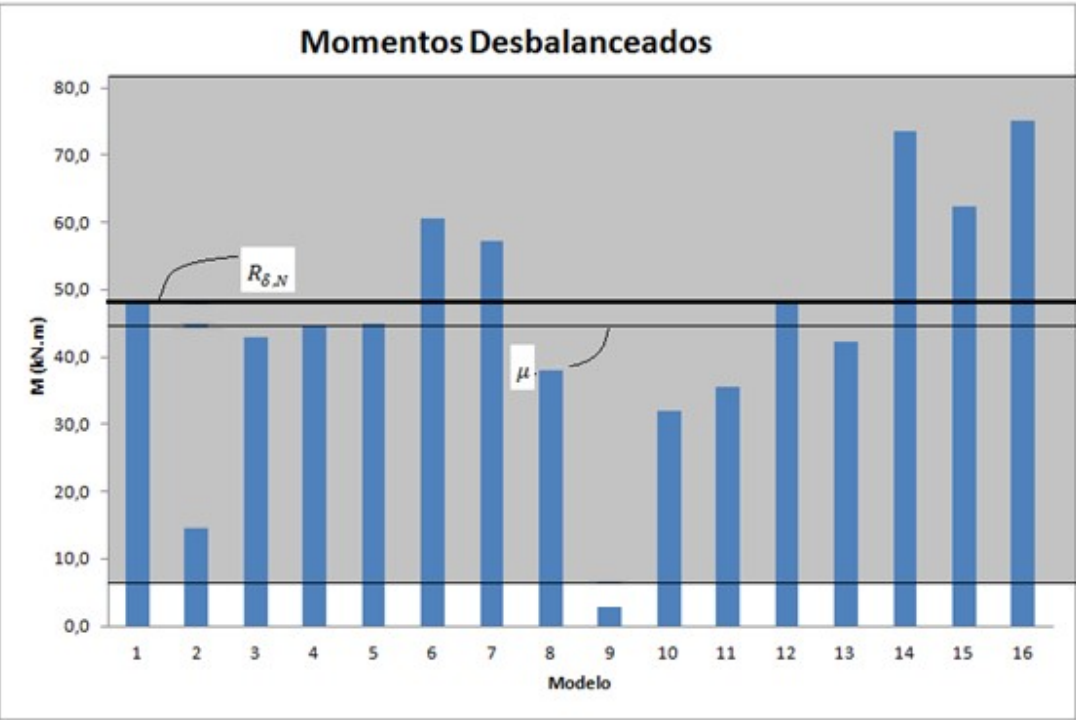


Figura 5.2 – Momentos desbalanceados da laje para o caso do pilar A1-R

Observando as Figuras 5.1 e 5.2 é possível estimar os modelos que se distanciam do valor de referência. Os modelos 14, 15 e 16, onde se usou o MPE, forneceram valores acima, e os modelos 2 e 9, considerando o pilar modelado como apoio pontual no MEF e AG, forneceram valores muito abaixo dos valores de referência.

Com relação às forças de reação dos pilares entre todos os modelos, calculou-se um coeficiente de variação (cov) de 0,03. O cov dos momentos desbalanceados calculado para todos os modelos é igual a 0,42, muito maior que o de N. Quando se excluem os modelos 2 e 9, o cov dos momentos resulta igual a 0,27, enquanto que quando se excluem apenas os modelo 14, 15 e 16, obtém-se um cov de 0,40. Excluindo os modelos com pilar modelado como apoio pontual e os modelos com o método dos pórticos equivalentes, o cov de M é 0,19. Percebe-se a influência na variabilidade dos modelos 2, 9, 14, 15 e 16 nos momentos desbalanceados.

Para análise da dispersão das tensões solicitantes provocada pelas variabilidades da força de reação do pilar e do momento desbalanceado dos modelos, define-se  $h_\delta$ . Fez-se a regressão linear múltipla com variáveis independentes N e  $M_y$ . O Quadro 5.2 apresenta os coeficientes da equação para o valor de  $h_\delta$ . A equação do plano  $h_\delta(N, M_y)$  é apresentada abaixo.

**Quadro 5.2 – Parâmetros de  $h_\delta$  para o caso do pilar A1-R**

			p-valor
R quadrado		1	6,0e-201
Coeficientes	Interseção	0	-
	N	2,151e-4	3,7e-209
	$M_y$	3,942e-3	2,7e-203

$$h_\delta(N, M_y) = 2,151 \cdot 10^{-4} \cdot N + 3,942 \cdot 10^{-3} \cdot M_y \quad [eq. 5.1]$$

Na regressão linear múltipla, como o p-valor foi muito baixo, o teste estatístico rejeita a hipótese nula, indicando que as variáveis independentes são significativas,  $h_\delta$  pode ser explicado totalmente em função de N e M (R quadrado = 1) e nenhuma das variáveis independentes pode ser excluída do modelo. Esse resultado já é esperado, uma vez que os valores são provenientes da [eq. 2.4]. A Figura 5.3 mostra o gráfico do plano  $h_\delta(N, M)$  considerando os valores obtidos por todos os 16 modelos, enquanto que a Figura 5.4 mostra o gráfico de  $h_\delta(N, M)$  excluindo valores dos modelos 2, 9, 14, 15 e 16. O eixo z nas figuras representa  $h_\delta$ , onde adotou-se como intervalo na representação do eixo no gráfico 0,4 a 1,6; mantém-se desta forma a proporcionalidade entre as Figuras 5.3 e 5.4. Os eixos x e y representam as forças de reação N e os momentos desbalanceados  $M_y$ , respectivamente.

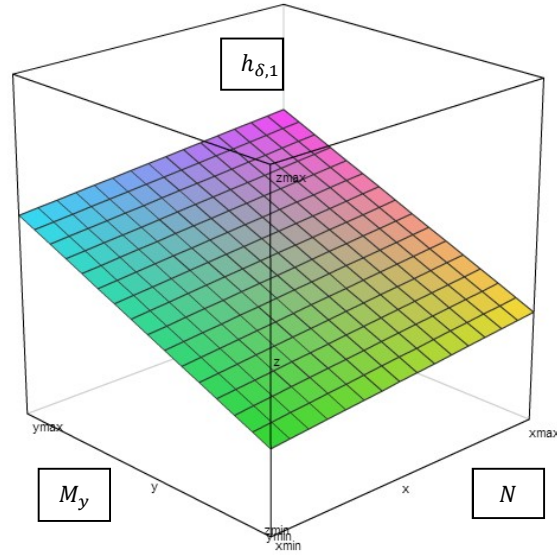


Figura 5.3 – Variação de  $h_{\delta,1}$  em função de  $N$  e  $M_y$  para o pilar A1-R com todos os modelos

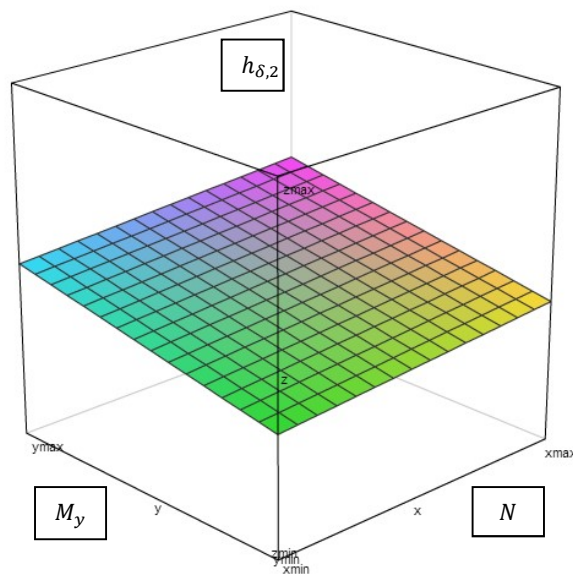


Figura 5.4 – Variação de  $h_{\delta,2}$  em função de  $N$  e  $M_y$  para o pilar A1-R sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16

Pela Figura 5.3, é possível perceber a grande influência que a variabilidade dos momentos desbalanceados têm na dispersão das tensões solicitantes em relação à variabilidade das forças de reação. Olhando a intersecção de  $h_{\delta,1}$  com o plano yz, encontra-se uma reta com inclinação bem mais acentuada em relação à reta formada da intersecção de  $h_{\delta,1}$  com o plano xz. A inclinação de ambas as retas, no entanto, é bastante inferior quando se comparam às mesmas retas na Figura 5.4, especialmente quando se olha o plano yz (dos momentos desbalanceados). Como  $h_{\delta}$  é um valor de tensões normalizado pelas tensões do modelo 1 (modelo com trecho rígido) e, considerando que o modelo 1 como referência, valores de  $h_{\delta}$  inferiores a 1 indicariam esforços contra a segurança, enquanto que valores acima de 1 indicariam esforços a favor da segurança. Para o intervalo considerado dos esforços,  $h_{\delta,1}$  variou de 0,697 a 1,211, enquanto que  $h_{\delta,2}$  variou de 0,808 a 1,073.

Além da inclinação das retas mencionadas serem inferiores na Figura 5.4, é possível verificar que o ponto mínimo de  $h_{\delta,2}$  é maior que o mínimo de  $h_{\delta,1}$ , fornecido pela Figura 5.3. Portanto, excluindo os modelos que aumentam a variabilidade dos esforços, reduz-se a dispersão das tensões e se reduz a possibilidade de obter esforços que estariam contra a segurança.

Para que seja verificado o impacto da variabilidade dos modelos de análise na segurança, definem-se as incertezas de modelo EMU. A curva de distribuição de probabilidades para o EMU  $\lambda_{\delta 1}$  é apresentada na Figura 5.5. A variável aleatória  $\lambda_{\delta 1}$  em função das tensões solicitantes para cada modelo é ajustada à uma curva normal, onde se apresentam a média e o desvio padrão.

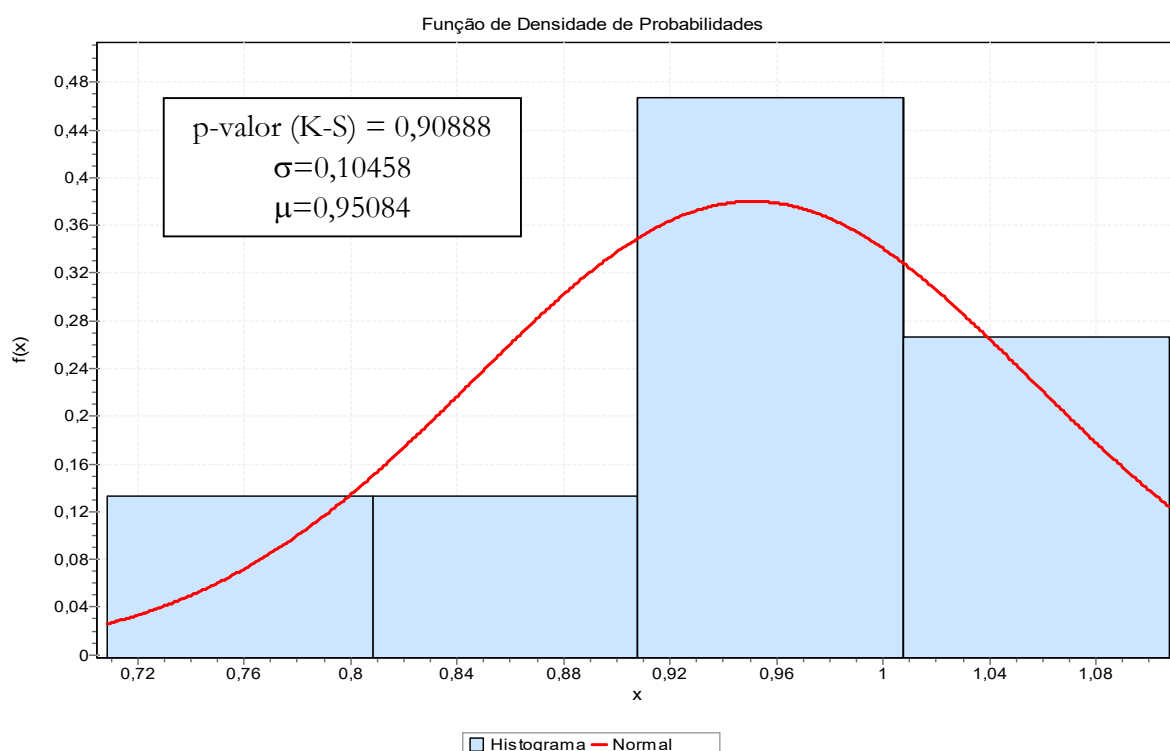


Figura 5.5 – Histograma de distribuição de probabilidades para  $\lambda_{\delta 1}$  para o caso do pilar A1-R.

### 5.1.2 Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança

Para estimar os efeitos do EMU na segurança da ligação laje pilar do caso de estudo do pilar A1-R, é feito um estudo probabilístico para se obter a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade  $\beta$ . Os dados para o cálculo são apresentados no Quadro 5.3. O EMU  $\lambda_{\delta 1}$  leva em conta a participação das forças de reação do pilar e dos momentos desbalanceados na lajes em função da tensão solicitante obtida pela equação da NBR 6118/14.

Quadro 5.3 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Fator de segurança	Fator de segurança implícito na equação da tensão resistente da verificação da punção	$\xi$	Normal	0,187	0,02	-
Esforços	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga permanente	$N_G$	Normal	174,9	7,0	kN
	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga acidental	$N_Q$	Gumbel	69,9	17,5	kN
Materiais	Resistência média do concreto	$f_c$	Normal	35,9	5,4	MPa
Geometria	Altura útil da laje	$d$	Normal	12,4	0,31	cm
	Dimensão do lado $c_1$ do pilar	$c_1$	Normal	86,5	0,865	cm
	Dimensão do lado $c_2$ do pilar	$c_2$	Normal	29,0	0,29	cm
	Excentricidade da carga no pilar	$e$	Determinístico	19,44	-	cm
	Taxa de armadura negativa de flexão	$\rho$	Determinístico	0,0109	-	cm <sup>2</sup> /m
Variabilidades nos modelos	Incerteza de Modelo da JCSS	$\Theta_1$	Lognormal	1,0	0,1	-
	EMU referente à variabilidade das tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Normal	0,95084	0,10458	-

A Figura 5.6 mostra o gráfico de convergência de  $\beta$  para  $g(x)$ , onde os valores em vermelho do gráfico representam a convergência de  $\beta$ , enquanto os valores em azul, a diferença da iteração anterior em relação à seguinte. O Quadro 5.4 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas dos modelos.

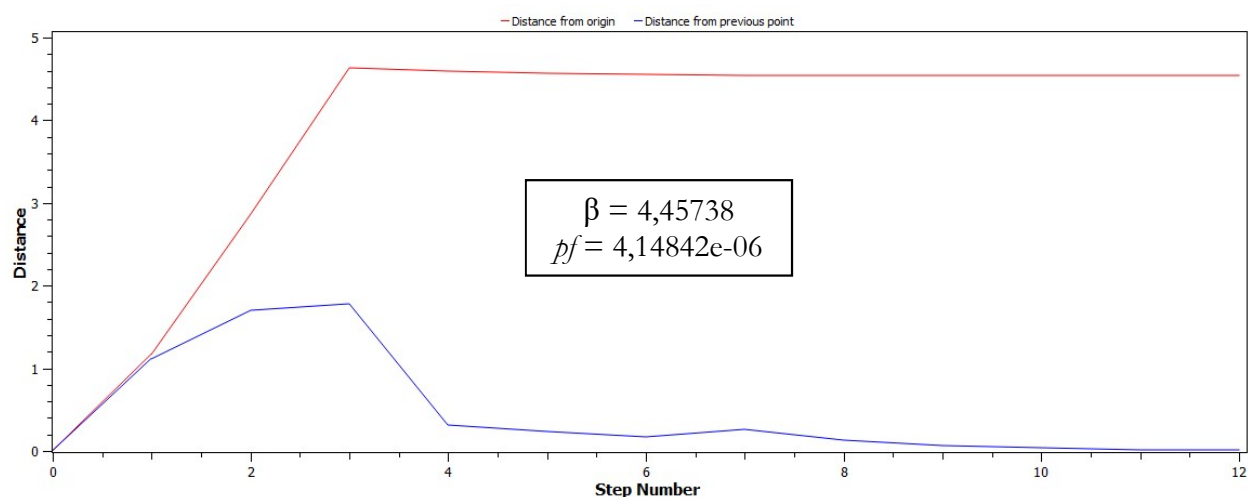


Figura 5.6 – Convergência de  $\beta$  para  $g(x)$  para o caso do pilar A1-R.

**Quadro 5.4 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar A1-R**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,46	4,15e-06
$g'_1(x)$	$\theta_1$	4,00	3,16e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	3,57	1,74e-04

Nesta primeira análise é possível perceber que existe influência da variabilidade dos modelos na segurança da estrutura. A probabilidade de falha calculada considerando todos os modelos do caso de estudo do pilar A1-R é maior quando comparada a da variável incerteza de modelo do JCSS (2001).

Desconsiderando os esforços obtidos pelo modelo com pilares modelados como apoios pontuais, Modelos 2 e 9, tem-se as seguintes variabilidades nos modelos:

**Quadro 5.5 – EMU para o pilar A1-R desconsiderando esforços obtidos pelos modelos 2 e 9**

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Variabilidades nos modelos	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Normal (p-valor=0,980)	0,98232	0,06687	-

O Quadro 5.6 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas dos modelos sem a consideração dos modelos 2 e 9, onde se modelam os pilares como apoio pontual.

**Quadro 5.6 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar A1-R sem Modelos 2 e 9**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,46	4,15e-06
$g'_1(x)$	$\theta_1$	4,00	3,16e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	4,15	1,70e-05

Percebe-se que para esta configuração de laje, o método dos pórticos equivalentes ainda é adequado para obtenção dos esforços para verificação da punção. Portanto mesmo com uma participação pequena nas tensões solicitantes totais, os modelos onde se consideram o pilar como apoio pontual aumentam muito a variabilidade da incerteza de modelo, tornando-os inadequados para obtenção dos esforços. No entanto, quando se excluem os modelos 2 e 9 da análise, a variabilidade dos momentos desbalanceados ainda é alta (coeficiente de variação igual a 0,267) por conta dos modelos usando o método dos pórticos equivalentes. Neste caso, a probabilidade de falha obtido com o EMU onde se considera o método dos pórticos equivalentes resulta abaixo da obtida pela incerteza de modelo do JCSS, e isto ocorre devido ao baixo valor de  $\alpha$ , ou seja, uma participação reduzida dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção.

## 5.2 Pilar interno A2-R

Neste segundo caso de estudo, considera-se uma laje com os vãos ao longo do eixo x bastante diferentes e pilar interno retangular, de modo a amplificar o efeito do momento desbalanceado no cálculo da punção e também haver uma maior parcela dos momentos transferidos ao pilar pela maior inércia em torno de y.

### 5.2.1 Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos

Os esforços normais e momentos desbalanceados, assim como as tensões solicitantes de punção obtidas pela NBR 6118/14 são apresentados no Quadro 5.7.

**Quadro 5.7 – Esforços e tensões solicitantes para o pilar A2-R**

Modelo		Id	N (kN)	My (kN.m)	$\tau_{sd}$ (MPa)	$\lambda_{\delta 1}$
MEF	Trecho Rígido (Referência)	1	239,9	107,1	1,27	-
	Pontual	2	235,4	31,1	0,85	0,67
	Carga distribuída	3	238,9	96,6	1,21	0,95
	Carga distribuída no plano médio da laje	4	235,6	100,0	1,22	0,96
	Sólido	5	243,4	101,3	1,25	0,98
	4 Barras	6	241,1	136,5	1,43	1,13
	4 Molas	7	238,2	129,1	1,39	1,09
AG	Trecho Rígido	8	237,9	84,8	1,15	0,90
	Pontual	9	235,7	15,4	0,72	0,57
	Carga distribuída	10	239,3	71,2	1,08	0,85
	Carga distribuída no plano médio da laje	11	237,4	79,6	1,12	0,88
	4 Barras	12	240,2	108,0	1,28	1,00
	4 Molas	13	243,2	95,0	1,22	0,96
MPE	NBR	14	227,3	181,8	1,64	1,29
	ACI	15	238,0	150,1	1,50	1,18
	EC	16	231,8	184,8	1,66	1,31

Novamente, os modelos 2 e 9, obtidos pelos modelos numéricos considerando apoio pontual, mostram resultados bastante díspares de momentos desbalanceados em relação aos demais modelos, conforme pode se observar no Quadro 5.7. Também neste caso de estudo, os momentos desbalanceados obtidos pelo método dos pórticos equivalentes apresentam valores maiores dos observados pelos outros modelos. Mesmo com as diferenças significativas observadas nos momentos desbalanceados, as forças de reação dos pilares não apresentam grandes diferenças entre



os modelos. O coeficiente  $\alpha$ , que fornece a participação percentual dos momentos desbalanceados na tensão solicitantes de punção pela NBR 6118/14, dado pela [eq. 4.14], é obtido em função do Modelo 1 e apresentado abaixo:

$$\alpha_{A2-R} = 45,0\%$$

Neste caso de estudo, a participação do momento desbalanceado na tensão solicitante total de punção é pouco inferior ao dobro da observada no caso de estudo do pilar A1-R.

As Figuras 5.7 e 5.8 apresentam os histogramas dos esforços normais e momentos desbalanceados. Neste caso de estudo, percebe-se que existe uma tendência a se obterem valores menores que os de referência, comparando o valor esperado entre os modelos com o valor de referência do Modelo 1, tanto na força de reação do pilar quanto no momento desbalanceado, o que novamente indicaria uma média contra a segurança em relação aos esforços de referência. Percebe-se uma distância proporcionalmente menor do valor esperado dos momentos desbalanceados e do valor de referência aos obtidos no caso de estudo A1-R.

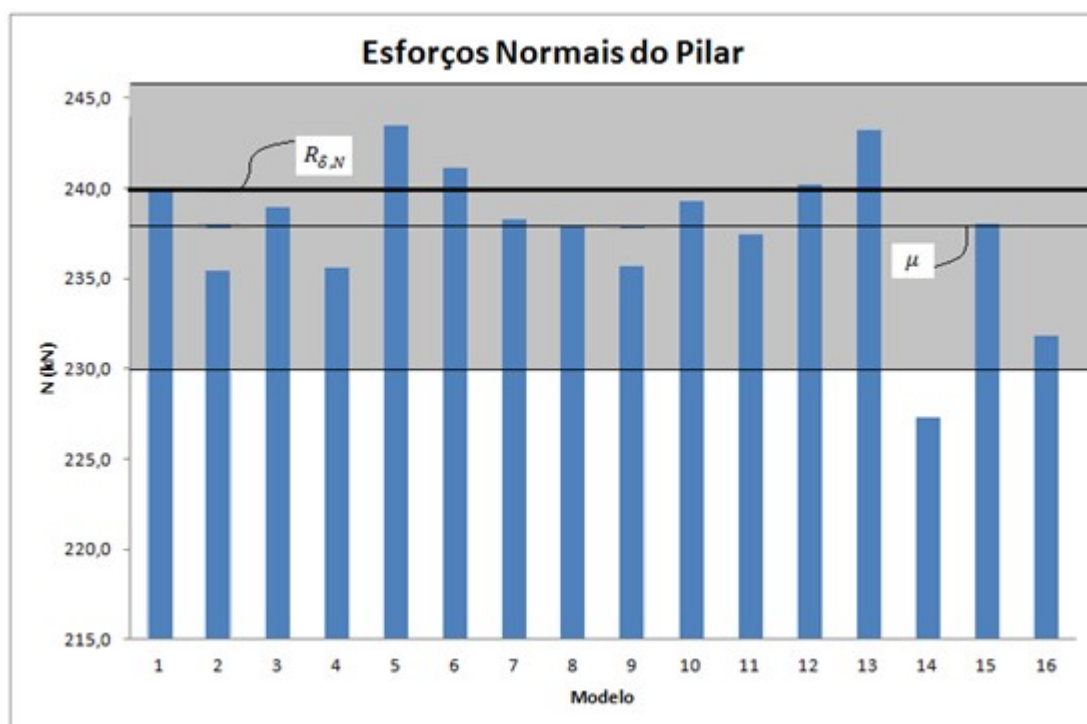


Figura 5.7 – Esforços normais do pilar para o pilar A2-R

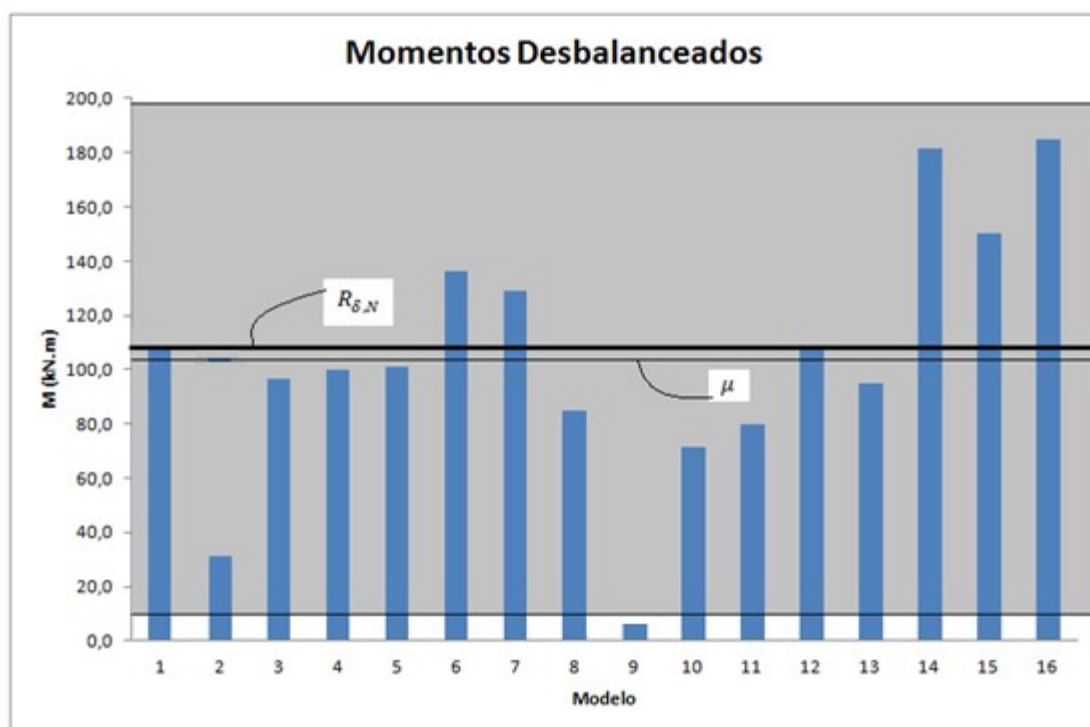


Figura 5.8 – Momentos desbalanceados da laje para o pilar A2-R

Percebe-se a grande variabilidade entre os valores dos momentos desbalanceados apresentados entre todos os modelos analisados, onde se observa um coeficiente de variação de 0,454. As forças de reação dos pilares obtidas dos diferentes modelos possuem uma variabilidade bastante inferior, com coeficiente de variação igual a 0,0176. Com relação aos momentos desbalanceados, quando se excluem os modelos 2 e 9, o cov resulta em 0,308; quando se excluem os modelos 14, 15 e 16, o cov resulta em 0,408; e quando se excluem os modelos 2, 9, 14, 15 e 16, o cov resulta em 0,193.

Para análise da dispersão das tensões solicitantes provocada pelas variabilidades da força de reação do pilar e do momento desbalanceado dos modelos, define-se  $h_{\delta}$ . Fez-se a regressão linear múltipla com variáveis independentes N e  $M_y$ . O Quadro 5.8 apresenta os coeficientes da equação para o valor de  $h_{\delta}$ . A equação do plano  $h_{\delta}(N, M_y)$  também é apresentada abaixo.

Quadro 5.8 – Parâmetros de  $h_{\delta}$  para o caso do pilar A2-R

			p-valor
R quadrado		1	5,5e-200
Coeficientes	Intercepto	0	-
	N	1,6380e-3	3,6e-183
	$M_y$	3,0013e-3	1,9e-200

$$h_{\delta}(N, M_y) = 1,6380 \cdot 10^{-3} \cdot N + 3,0013 \cdot 10^{-3} \cdot M_y \quad [eq. 5.2]$$

Como o p-valor foi praticamente nulo, o teste estatístico rejeita a hipótese nula, indicando que as variáveis independentes são significativas,  $h_{\delta}$  pode ser explicado totalmente em função de N e M (R quadrado = 1) e nenhuma das variáveis independentes pode ser excluída do modelo. Esse resultado já é esperado, uma vez que os valores são provenientes da [eq. 2.4]. A Figura 5.9 mostra o gráfico do plano  $h_{\delta,1}(N, M)$  considerando os valores obtidos por todos os 16 modelos, enquanto que a Figura 5.10 mostra o gráfico de  $h_{\delta,2}(N, M)$  excluindo valores dos modelos 2, 9, 14, 15 e 16. O eixo z nas figuras representa  $h_{\delta}$ , onde, como no caso do pilar A1-R, adotou-se os valores limites no gráfico de 0,4 a 1,6; mantém-se desta forma a proporcionalidade entre as Figuras 5.10, 5.11 e as do caso de estudo A1-R. Os eixos x e y representam as forças de reação N e os momentos desbalanceados  $M_y$ , respectivamente.

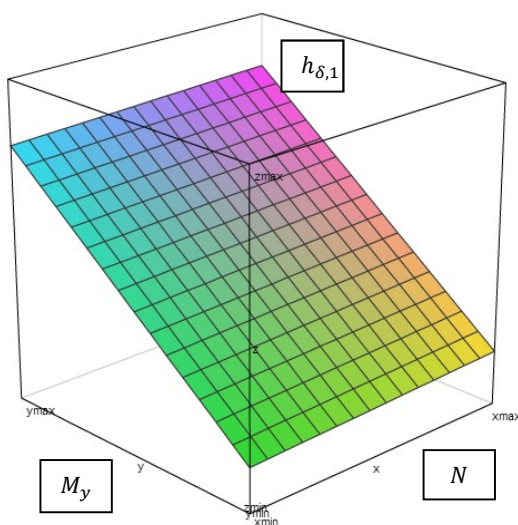


Figura 5.9 – Variação de  $h_{\delta,1}$  em função de N e  $M_y$  para o pilar A2-R com todos os modelos

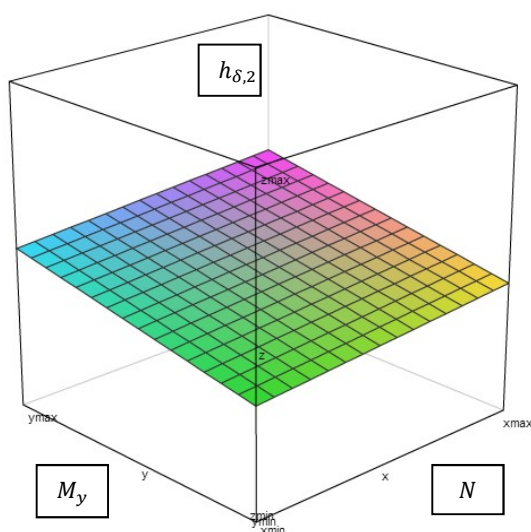


Figura 5.10 – Variação de  $h_{\delta,2}$  em função de N e  $M_y$  para o pilar A2-R sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16

A reta que se forma na intersecção de  $h_{\delta,1}$  com o plano yz tem inclinação muito mais acentuada que a reta formada da intersecção de  $h_{\delta,1}$  com o plano xz, justificando a maior

variabilidade de My. Para o intervalo considerado dos esforços,  $h_{\delta,1}$  variou de 0,566 a 1,398, enquanto que  $h_{\delta,2}$  variou de 0,798 a 1,148. Além da inclinação das retas mencionadas serem inferiores na Figura 5.10, verifica-se que o ponto mínimo de  $h_{\delta,1}$  é inferior ao mínimo de  $h_{\delta,2}$ . Com relação ao caso A1-R, percebe-se uma maior dispersão dos valores de  $h_{\delta,1}$  e  $h_{\delta,2}$  no caso A2-R.

A curva de distribuição de probabilidades para o EMU  $\lambda_{\delta 1}$  é apresentada na Figura 5.12. A variável aleatória  $\lambda_{\delta 1}$  em função das tensões solicitantes para cada modelo é ajustada à uma curva normal, onde se apresentam a média e o desvio padrão.

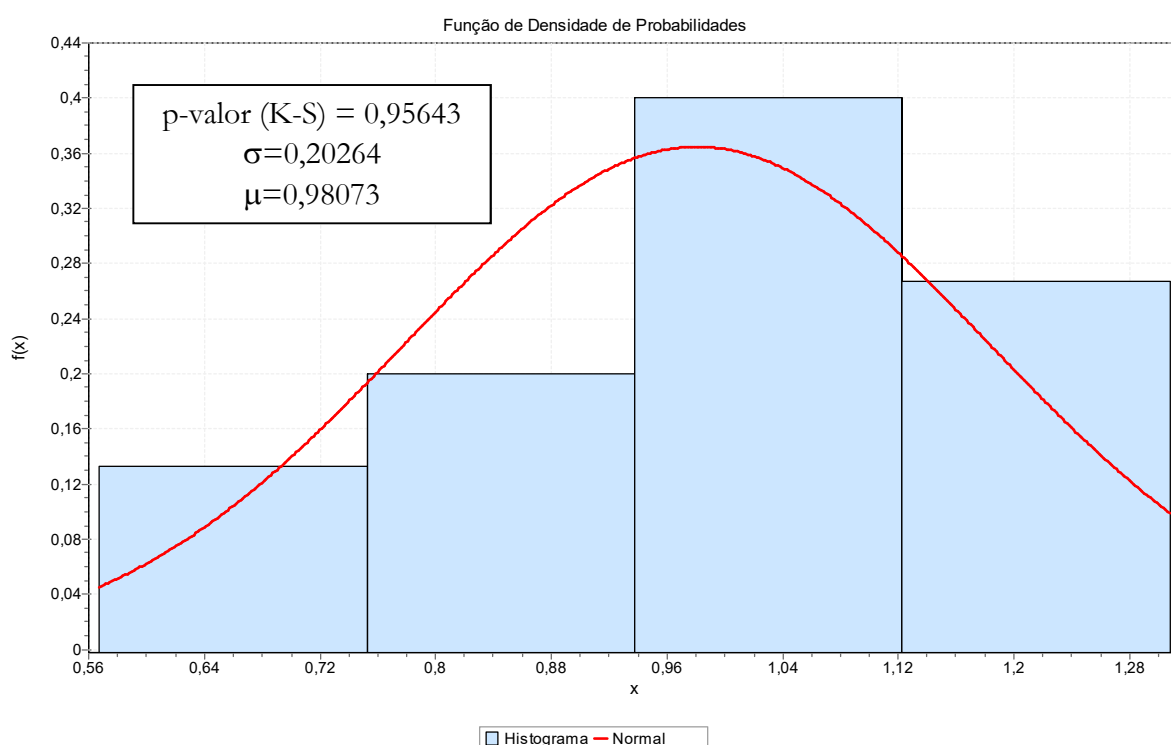


Figura 5.11 – Histograma de distribuição de probabilidades para  $\lambda_{\delta 1}$  para o pilar A2-R.

## 5.2.2 Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança

Para estimar os efeitos do EMU na estrutura estudada, é apresentado um estudo de confiabilidade SORM- $\beta$  usando o *software* Rt (MAHSULI & HAUKAAS, 2013). Os dados para o cálculo são apresentados no Quadro 5.9. O EMU  $\lambda_{\delta 1}$  leva em conta a participação das forças de reação do pilar e dos momentos desbalanceados na lajes em função da tensão solicitante obtida pela equação da NBR 6118/2014.

Quadro 5.9 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Fator de segurança	Fator de segurança implícito na equação da tensão resistente da verificação da punção	$\xi$	Normal	0,187	0,02	-
Esforços	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga permanente	$N_G$	Normal	171,4	6,9	kN
	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga accidental	$N_Q$	Gumbel	68,5	17,1	kN
Materiais	Resistência média do concreto	$f_c$	Normal	47,84	7,2	MPa
Geometria	Altura útil da laje	$d$	Normal	12,4	0,31	cm
	Dimensão do lado $c_1$ do pilar	$c_1$	Normal	86,5	0,865	cm
	Dimensão do lado $c_2$ do pilar	$c_2$	Normal	29,0	0,29	cm
	Excentricidade da carga no pilar	$e$	Determinístico	44,64	-	cm
	Taxa de armadura negativa de flexão	$\rho$	Determinístico	0,0192	-	cm <sup>2</sup> /m
Variabilidades nos modelos	Incerteza de Modelo da JCSS	$\theta_1$	Lognormal	1,0	0,1	-
	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Normal	0,98073	0,20264	-

A Figura 5.12 mostra o gráfico do índice de confiabilidade  $\beta$  para  $g(x)$ , onde os valores em vermelho do gráfico representam a convergência de  $\beta$ , enquanto os valores em azul a diferença da iteração anterior em relação à seguinte. O Quadro 5.10 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas de todos os modelos.

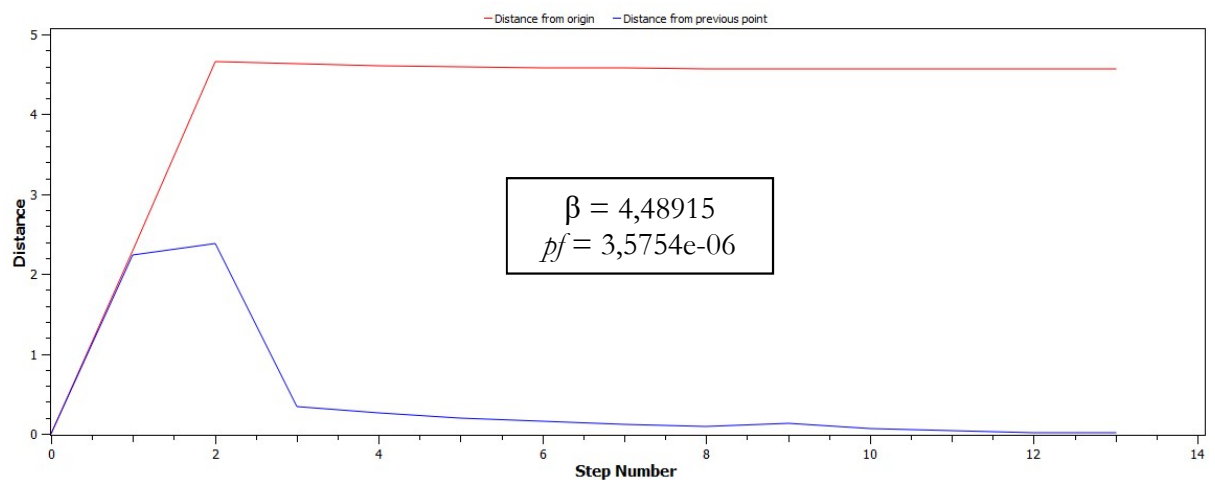


Figura 5.12 – Convergência de  $\beta$  para  $g(x)$  para o pilar A2-R.

**Quadro 5.10 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar A2-R**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,49	3,58e-06
$g'_1(x)$	$\Theta_1$	4,03	2,77e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	2,44	7,33e-03

A maior participação dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção (valor  $\alpha$ ), juntamente à alta variabilidade dos momentos desbalanceados entre os modelos aumentou bastante a probabilidade de falha em relação ao caso de estudo A1-R.

Desta forma, desconsiderando os esforços obtidos pelos modelos considerando os pilares modelados como apoios pontuais (modelos 2 e 9), tem-se os seguintes dados para a incerteza de modelo EMU (Quadro 5.11):

**Quadro 5.11 – EMU para o pilar A2-R desconsiderando esforços obtidos pelos modelos 2 e 9**

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Variabilidades nos modelos	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Normal (p-valor=0,610)	1,0364	0,14924	-

O Quadro 5.12 apresenta os valores dos índices de confiabilidade e probabilidade de falha dos casos sem a consideração dos modelos 2 e 9.

**Quadro 5.12 – Índices de confiabilidade e probabilidades de falha para o caso A2-R excluindo modelos 2 e 9**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,49	3,58e-06
$g'_1(x)$	$\Theta_1$	4,03	2,77e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	3,45	2,83e-04

Percebe-se que para esta configuração de laje, mesmo desconsiderando os modelos de pilar como apoio pontual, a variabilidade dos modelos não é adequada para obtenção dos esforços para punção. De modo a reduzir a variabilidade dos modelos, desconsideram-se então os esforços obtidos pelo método dos pórticos equivalentes (modelos 14, 15 e 16) e os modelos de pilar como apoio pontual (modelos 2 e 9), onde tem-se os novos dados para a incerteza de modelo EMU (Quadro 5.13):

**Quadro 5.13 – Dados dos EMU para o caso A2-R desconsiderando esforços obtidos pelos modelos 2,9,14,15 e 16**

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Variabilidades nos modelos	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Normal (p-valor=0,962)	0,97037	0,08717	-

O Quadro 5.14 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas dos modelos sem a consideração dos métodos dos pórticos equivalentes e do modelo com apoio pontual.

**Quadro 5.14 – Índices de confiabilidade para o caso A2-R excluindo os modelos 2,9,14,15 e 16**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,49	3,58e-06
$g'_1(x)$	$\Theta_1$	4,03	2,77e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	3,93	4,22e-05

Desconsiderando os modelos de pilar como apoio pontual e os dos métodos dos pórticos equivalentes, ainda existe uma probabilidade de falha aproximadamente 52% maior que a estimada pelo erro de modelo da JCSS (2001). Nesta configuração de laje, onde ocorre uma maior participação dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção, o método dos pórticos equivalentes não mais seria adequado para obtenção dos esforços para verificação da punção. Os modelos onde se consideram o pilar como apoio pontual aumentam muito a variabilidade da incerteza de modelo, aumentando consideravelmente a probabilidade de falha. Ainda assim, mesmo quando se excluíram os modelos 2, 9, 14, 15 e 16 da análise, a probabilidade de falha obtida com os EMUs resultou maior que a obtida pela incerteza de modelo do JCSS.

### 5.3 Pilar interno B2-Q

Neste terceiro caso de estudo, é estudada a laje lisa cujo pilar interno possui assimetria acentuada nos eixos x e y. Considera-se o pilar interno com seção quadrada, de modo a amplificar o efeito do momento desbalanceado na parcela das tensões solicitantes no cálculo da punção pela NBR 6119/14, segundo os dados relacionados nas Figuras 4.16 e 4.17.

#### 5.3.1 Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos

Os esforços normais e momentos desbalanceados são apresentados no Quadro 5.15.

**Quadro 5.15 – Esforços e tensões solicitantes segundo os diferentes modelos para o pilar B2-Q**

Modelo		Id	N (kN)	My (kN.m)	Mx (kN.m)	$\tau_{sd}$ (MPa)	$\lambda_{\delta 1}$
MEF	Trecho Rígido (Referência)	1	227,1	82,4	82,4	0,99	-
	Pontual	2	221,9	30,6	30,6	0,66	0,66
	Carga distribuída	3	225,4	75,6	75,6	0,94	0,95
	Carga distribuída no plano médio da laje	4	222,2	76,7	76,7	0,94	0,95
	Sólido	5	230,2	76,9	76,9	0,96	0,97
	4 Barras	6	227,6	103,8	103,8	1,12	1,14
	4 Molas	7	223,1	96,7	96,7	1,07	1,08
AG	Trecho Rígido	8	224,7	67,6	67,6	0,89	0,90
	Pontual	9	221,5	12,1	12,1	0,52	0,52
	Carga distribuída	10	225,3	57,5	57,5	0,83	0,84
	Carga distribuída no plano médio da laje	11	223,7	63,2	63,2	0,86	0,87
	4 Barras	12	226,4	84,9	84,9	1,00	1,01
	4 Molas	13	227,5	73,5	73,5	0,94	0,95
MPE	NBR	14	241,5	159,6	159,6	1,50	1,51
	ACI	15	256,2	111,6	111,6	1,23	1,24
	EC	16	247,8	150,0	150,0	1,45	1,47

Neste caso existem excentricidades nos dois eixos do pilar e que, pelo fato do pilar ser



quadrado e a assimetria nos dois eixos do plano da laje ser a mesma, apresentam os mesmo valores de momentos desbalanceados, conforme se observa no Quadro 5.15. Os modelos de pilares como apoio pontual apresentam resultados inferiores de momentos desbalanceados em relação aos demais modelos, assim como nos dois casos de estudo anteriores. A mesma característica observada nos casos de estudo A1-R e A2-R se observa nos modelos 14, 15 e 16 deste caso de estudo, onde os momentos desbalanceados apresentam valores maiores que os observados pelos outros modelos. As forças de reação dos pilares são pouco maiores quando se olham os modelos pelo MPE. O coeficiente  $\alpha$ , que fornece a participação percentual dos momentos desbalanceados na tensão solicitantes de punção pela NBR 6118/14, dado pela [eq. 4.14], é obtido em função do Modelo 1 e apresentado abaixo. Já neste terceiro caso de estudo, a participação dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção ultrapassa a parcela da força de reação do pilar.

$$\alpha_{B2-Q} = 51,7\%$$

As Figuras 5.15 e 5.16 apresentam os histogramas das forças de reação do pilar e os momentos desbalanceados, onde  $M_x$  é igual a  $M_y$ . O valor esperado dos esforços normais considerando todos os casos é maior que o valor de referência, puxado pelos modelos calculados pelo MPE, indicando uma tendência a favor da segurança. Analisando a Figura 5.16, observa-se que o valor esperado dos momentos desbalanceados está muito próxima do valor de referência, embora com uma variabilidade bastante elevada.

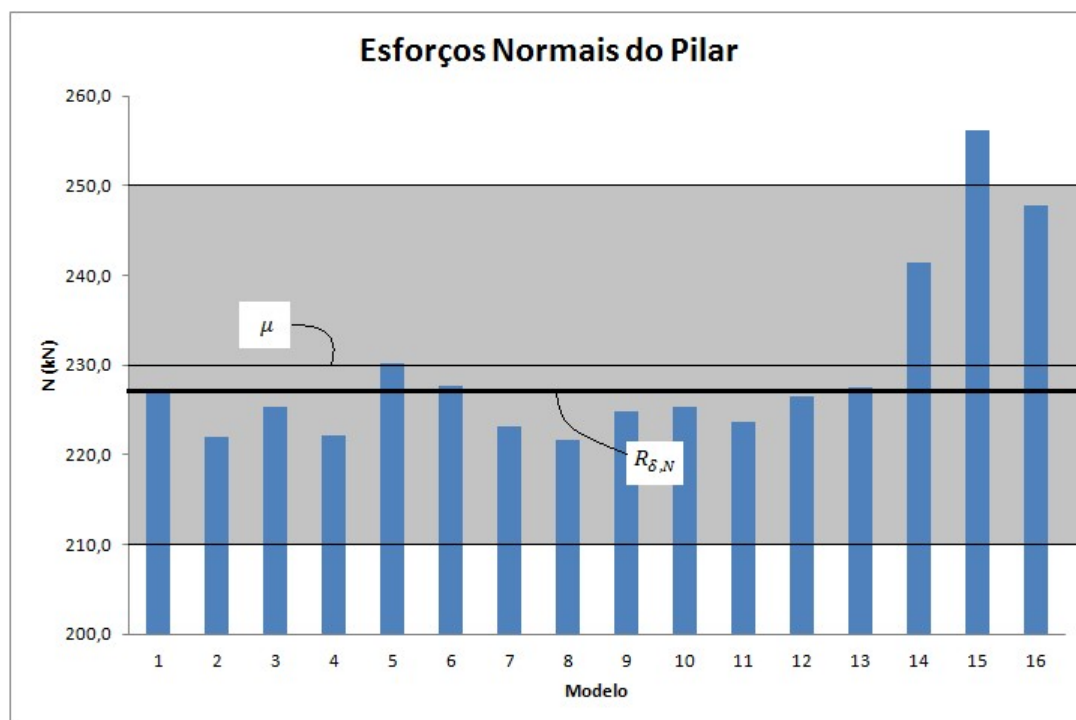


Figura 5.13 – Esforços normais do pilar para o pilar B2-Q

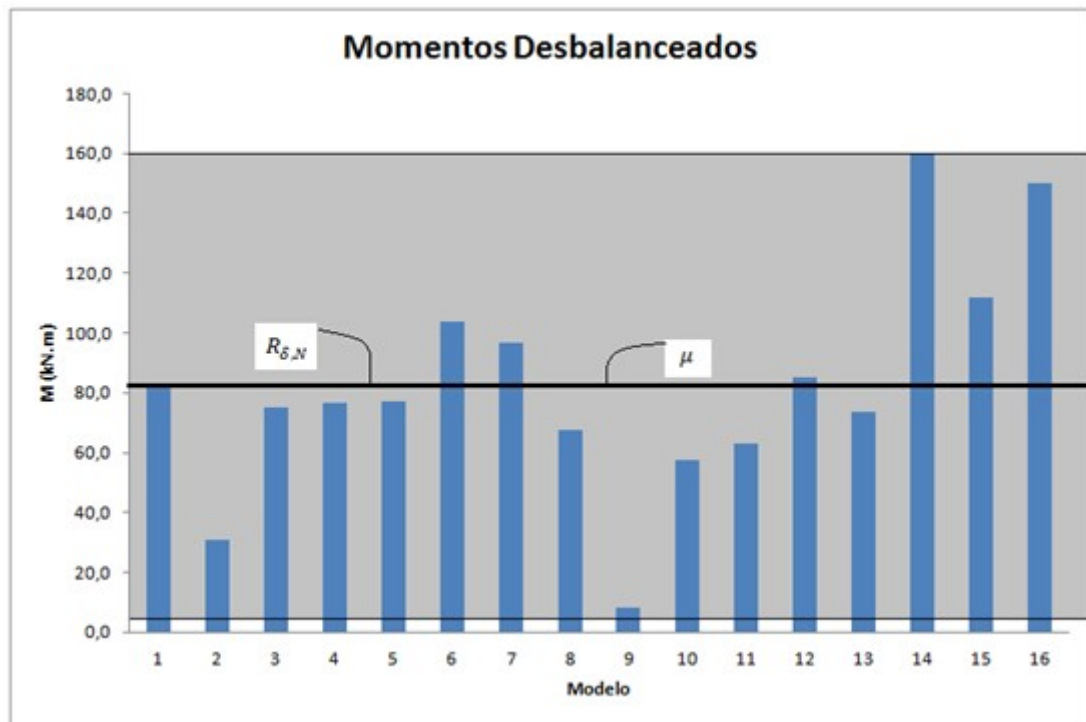


Figura 5.14 – Momentos desbalanceados da laje para o pilar B2-Q

Os valores dos momentos desbalanceados tiveram um coeficiente de variação de 0,46 considerando os 16 modelos, enquanto que as forças de reação dos pilares 0,04. As forças de reação apresentaram um coeficiente de variação maior que o do caso A2-R em função dos valores dos modelos 14, 15 e 16, acima da média e fora da área hachurada da Figura 5.15. Os modelos que mais contribuem para a maior variabilidade nos momentos desbalanceados são 2, 9, 14, 15 e 16. Excluindo estes modelos, encontra-se um cov igual a 0,01 para as forças N e 0,175 para os momentos desbalanceados Mx e My.

Para  $h_{\delta}$ , fez-se uma regressão linear múltipla, com variáveis independentes N, My e Mx, todos com os valores de cálculo. O Quadro 5.16 apresenta os coeficientes da equação para o valor de  $h_{\delta}$ . Como o tamanho da amostra é pequeno, os resíduos são praticamente nulos, sendo possível desprezar os erros.

Quadro 5.16 – Parâmetros de  $h_{\delta}$  para o caso do pilar B2-Q

			p-valor
R quadrado		1	6,3e-201
Coeficientes	Intercepto	0	-
	N	1,5167e-3	1,7e-185
	My	4,4834e-3	4,0e-200
	Mx	0	-

$$h_{\delta}(N, M_y) = 1,5167 \cdot 10^{-3} \cdot N + 4,48343 \cdot 10^{-3} \cdot M_y \quad [eq. 5.3]$$

Com exceção de  $M_x$ , o p-valor resultou praticamente nulo. Portanto o teste estatístico rejeita a hipótese nula, indicando que as demais variáveis independentes são significativas e que  $N$  e  $M_y$  não podem ser excluídas do modelo. Como  $M_x$  é igual a  $M_y$ , apenas  $N$  e  $M_y$  (ou  $M_x$ ) são suficientes para explicar totalmente o valor de  $h_\delta$ . A Figura 5.15 mostra o gráfico do plano  $h_{\delta,1}(N, M)$  considerando os valores obtidos por todos os 16 modelos, enquanto que a Figura 5.16 mostra o gráfico de  $h_{\delta,2}(N, M)$  excluindo valores dos modelos 2, 9, 14, 15 e 16. O eixo  $z$  nas figuras representa  $h_\delta$ , onde, como no caso do pilar A1-R e A2-R, adotou-se os valores do eixo  $z$  entre 0,4 e 1,6; mantém-se desta forma a proporcionalidade entre as Figuras 5.17, 5.18, e as dos casos de estudo A1-R e A2-R. Os eixos  $x$  e  $y$  representam as forças de reação  $N$  e os momentos desbalanceados  $M$ , respectivamente.

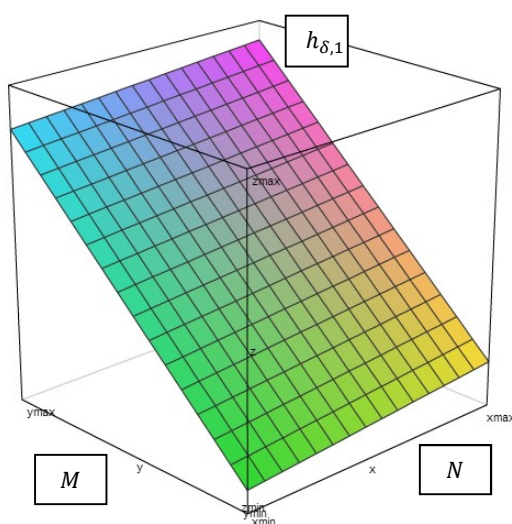


Figura 5.15 – Variação de  $h_{\delta,1}$  em função de  $N$  e  $M$  para o pilar B2-Q com todos os modelos

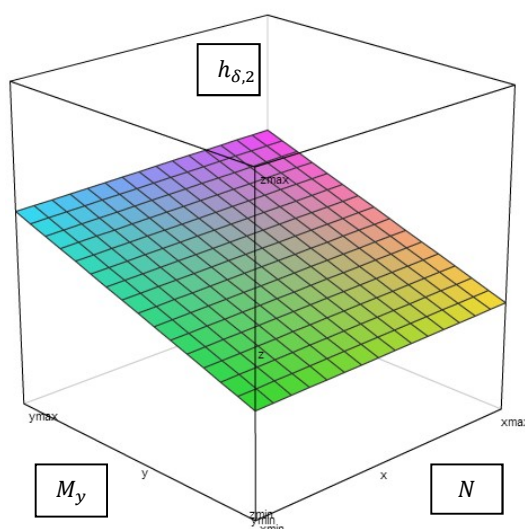


Figura 5.16 – Variação de  $h_{\delta,2}$  em função de  $N$  e  $M$  para o pilar B2-Q sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16

Neste exemplo, onde há momentos desbalanceados nos dois eixos, a variabilidade de  $M$  em relação a  $N$  é ainda maior que a observada nos casos de estudo anteriores. Excluindo os modelos

calculados com os métodos dos pórticos equivalentes e os modelos onde se modelou o pilar como apoio pontual, a variabilidade dos momentos transferidos ao pilar reduz sensivelmente. Para o intervalo considerado dos esforços,  $h_{\delta,1}$  variou de 0,486 a 1,524, enquanto que  $h_{\delta,2}$  variou de 0,788 a 1,151. Neste caso de estudo, o ponto mínimo de  $h_{\delta,1}$  é muito menor que o mínimo de  $h_{\delta,2}$ , como pode se observar nas Figuras 5.15 e 5.16. Comparando este caso de estudo com os casos A1-R e A2-R, percebe-se que conforme se aumenta o valor de  $\alpha$ , a variabilidade dos esforços também aumenta.

A curva de distribuição de probabilidades para o EMU  $\lambda_{\delta 1}$  é apresentada na Figura 5.19. A variável aleatória  $\lambda_{\delta 1}$  em função das tensões solicitantes para cada modelo é ajustada à uma curva Gumbel para máximos, onde se apresentam a média e o desvio padrão.

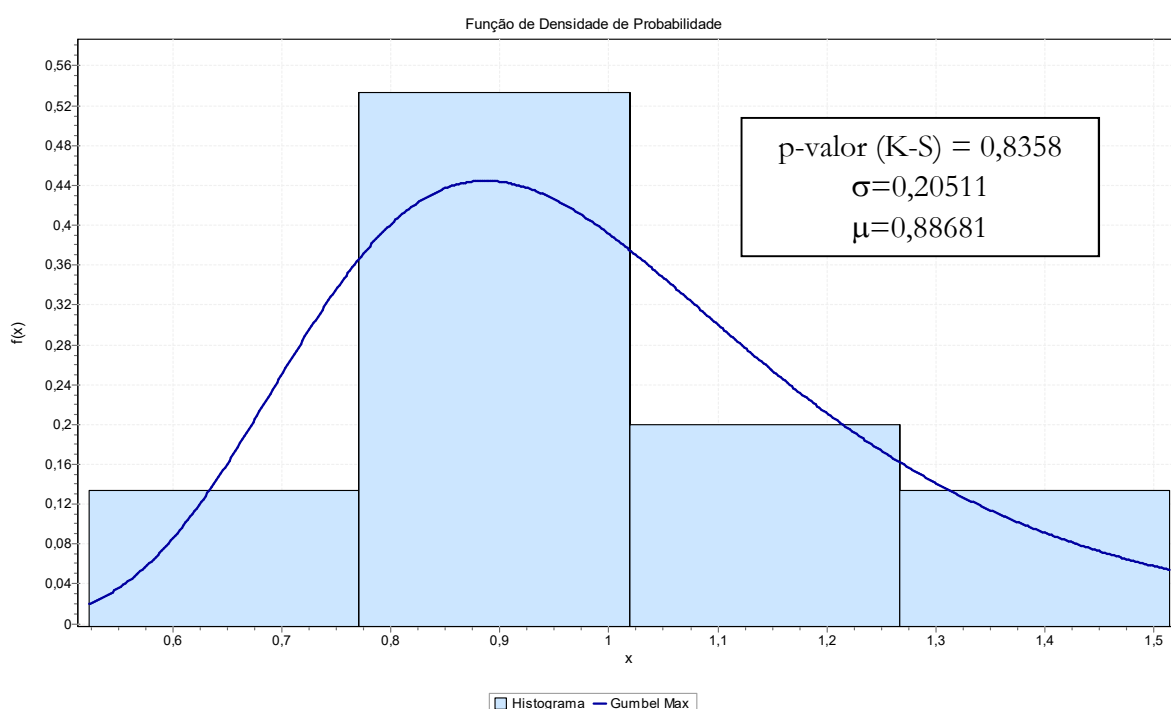


Figura 5.17 – Histograma de distribuição de probabilidades para  $\lambda_{\delta 1}$  para o pilar B2-Q.

### 5.3.2 Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança

Para estimar os efeitos do EMU na estrutura estudada, é apresentado um estudo de confiabilidade SORM- $\beta$  usando o *software* Rt (MAHSULI & HAUKAAS, 2013). Os dados para o cálculo são apresentados no Quadro 5.17. O EMU  $\lambda_{\delta 1}$  leva em conta a participação das forças de reação do pilar e dos momentos desbalanceados na lajes em função da tensão solicitante obtida pela equação da NBR 6118/2014.

Quadro 5.17 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar B2-Q

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Fator de segurança	Fator de segurança implícito na equação da tensão resistente da verificação da punção	$\xi$	Normal	0,187	0,02	-
Esforços	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga permanente	$N_G$	Normal	162,2	6,5	kN
	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga acidental	$N_Q$	Gumbel	64,9	16,2	kN
Materiais	Resistência média do concreto	$f_c$	Normal	41,86	6,3	MPa
Geometria	Altura útil da laje	$d$	Normal	16,4	0,41	cm
	Dimensão do lado $c_1$ do pilar	$c_1$	Normal	50,0	0,5	cm
	Dimensão do lado $c_2$ do pilar	$c_2$	Normal	50,0	0,5	cm
	Excentricidade da carga no pilar em cada eixo	$e_y = e_x$	Determinístico	37,64	-	cm
	Taxa de armadura negativa de flexão	$\rho$	Determinístico	0,014	-	-
Variabilidades nos modelos	Incerteza de Modelo da JCSS	$\theta_1$	Lognormal	1,0	0,1	-
	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Gumbel	0,88681	0,20511	-

Neste exemplo verificou-se uma correlação linear entre  $N_d$  e  $M_d$ , onde o coeficiente de correlação linear calculado foi de 0,724. No teste de hipótese se descartou a hipótese de não-linearidade com uma significância de 5%, com  $t = 3,931$ , inferior 2,145. Portanto, levou-se em conta a correlação entre as variáveis  $N_d$  e  $M_{yd}$  em  $\lambda_{\delta 2}$ .

A Figura 5.18 mostra o gráfico de convergência de  $\beta$  para  $g(x)$ , onde os valores em vermelho do gráfico representam a convergência de  $\beta$ , enquanto os valores em azul a diferença da iteração anterior em relação à seguinte. O Quadro 5.18 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas de todos os modelos.

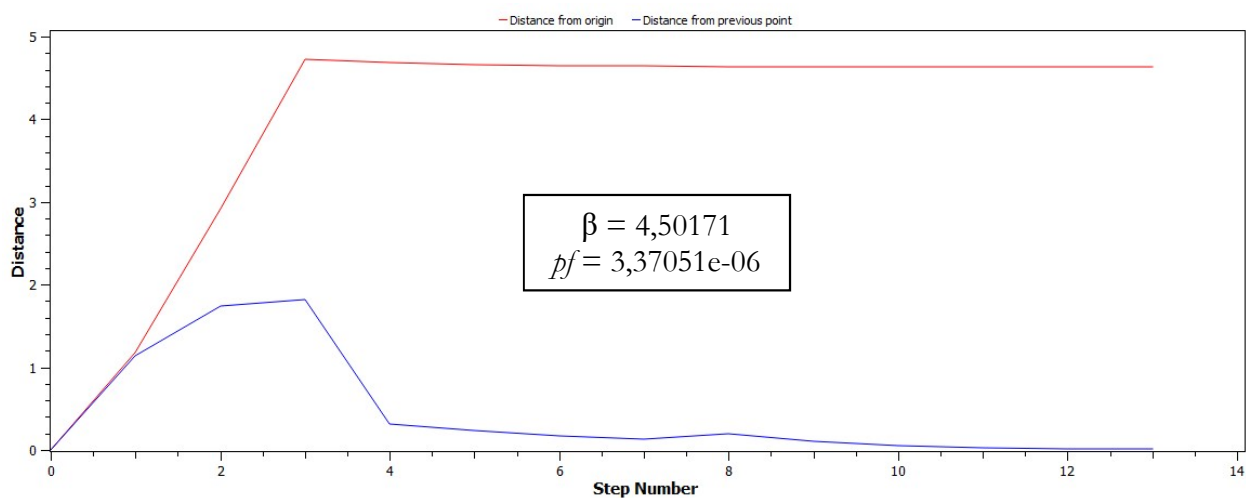


Figura 5.18 – Convergência de  $\beta$  para  $g(x)$  para o pilar B2-Q.

Quadro 5.18 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o caso do pilar B2-Q

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,50	3,37e-06
$g'_1(x)$	$\Theta_1$	4,05	2,60e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	2,60	4,72e-03

Também neste caso de estudo, a grande variabilidade e participação dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção (valor  $\alpha$ ), resultou em uma probabilidade de falha muito maior em relação ao erro de modelo da JCSS (2001). No entanto, como o valor esperado das forças de reação do pilar foi maior que o de referência, o índice de confiabilidade resultou um pouco maior que o observado no caso A2-R.

Desconsiderando os esforços obtidos pelos modelos com pilares modelados como apoios pontuais (modelos 2 e 9), tem-se os seguintes dados para as incertezas de modelo EMU (Quadro 5.19):

Quadro 5.19 – Dados dos EMU para o pilar B2-Q desconsiderando modelos 2 e 9

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Variabilidades nos modelos	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Gumbel (p-valor=0,804)	0,97073	0,16954	-

O Quadro 5.20 apresenta os resultados das análises de confiabilidade considerando as incertezas dos modelos excluindo os modelos com pilar como apoio pontual (modelos 2 e 9).

**Quadro 5.20 – Índice de confiabilidade e probabilidades de falha para o pilar B2-Q excluindo modelos 2 e 9**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,50	3,37e-06
$g'_1(x)$	$\theta_1$	4,05	2,60e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	3,49	2,40e-04

Novamente, mesmo desconsiderando os modelos 2 e 9, a variabilidade dos demais modelos não é adequada para obtenção dos esforços para punção. Desconsideram-se então os esforços obtidos pelos modelos 14, 15 e 16 e os modelos de pilar como apoio pontual (modelos 2 e 9), onde se obtêm novos dados para as incertezas de modelo EMU (Quadro 5.21):

**Quadro 5.21 – EMU para o pilar B2-Q desconsiderando modelos 2,9,14,15 e 16**

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Variabilidades nos modelos	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Normal (p-valor=0,867)	0,96649	0,09068	-

O Quadro 5.22 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas dos modelos sem a consideração dos métodos dos pórticos equivalentes e do modelo com apoio pontual.

**Quadro 5.22 – Índice de confiabilidade e probabilidades de falha para o pilar B2-Q excluindo os modelos 2,9,14,15 e 16**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,50	3,37e-06
$g'_1(x)$	$\theta_1$	4,05	2,60e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	3,89	5,07e-05

Desconsiderando os modelos 2, 9, 14, 15 e 16, ainda existe uma probabilidade de falha aproximadamente 95% maior que a estimada pelo erro de modelo da JCSS (2001). A configuração com pilar quadrado na posição B2 foge de uma laje com pilares dispostos ortogonalmente e com vãos pouco diferentes, resultando no método dos pórticos equivalentes não sendo adequado para obtenção dos esforços para verificação da punção. Os modelos 2 e 9 aumentam muito a probabilidade de falha. Também neste caso, a probabilidade de falha obtida com os EMUs resultou maior que a obtida pela incerteza de modelo do JCSS após a exclusão dos modelos 2, 9, 14, 15 e 16 na análise.

## 5.4 Pilar interno B2-R

O quarto caso de estudo apresenta uma laje lisa onde o pilar interno possui assimetria acentuada nos eixos x e y da laje. Considera-se o pilar interno com seção retangular, de modo a haver uma maior parcela dos momentos transferidos ao pilar pela maior inércia em torno de y, segundo os dados apresentados nas Figuras 4.18 e 4.19.

### 5.4.1 Estudo dos esforços solicitantes e das variabilidades dos modelos

Os esforços e as tensões solicitantes de punção correspondentes para o caso do pilar B2-R podem ser conferidos no Quadro 5.23.

**Quadro 5.23 – Esforços e tensões segundo os diferentes modelos para o pilar B2-R**

Modelo		Id	N (kN)	My (kN.m)	Mx (kN.m)	$\tau_{sd}$ (MPa)	$\lambda_{\delta 1}$
MEF	Trecho Rígido (Referência)	1	230,4	108,7	59,0	0,92	-
	Pontual	2	222,3	32,3	26,7	0,59	0,64
	Carga distribuída	3	226,2	98,2	54,1	0,87	0,94
	Carga distribuída no plano médio da laje	4	222,7	101,4	54,6	0,88	0,95
	Sólido	5	233,0	102,7	54,3	0,90	0,97
	4 Barras	6	229,0	138,4	73,3	1,05	1,13
	4 Molas	7	218,9	130,8	67,3	0,99	1,07
AG	Trecho Rígido	8	226,6	86,3	50,1	0,83	0,89
	Pontual	9	219,9	14,8	12,3	0,57	0,62
	Carga distribuída	10	225,0	72,6	43,1	0,76	0,83
	Carga distribuída no plano médio da laje	11	223,8	81,0	46,6	0,80	0,86
	4 Barras	12	226,8	109,8	62,0	0,93	1,00
	4 Molas	13	222,2	96,4	53,0	0,86	0,93
MPE	NBR	14	234,6	185,2	113,6	1,29	1,40
	ACI	15	242,7	163,2	57,8	1,12	1,21
	EC	16	238,9	183,6	97,4	1,26	1,37



Como neste caso o pilar possui seção retangular e assimetria nos dois eixos do plano da laje, existem diferentes valores de momentos desbalanceados para cada um dos eixos, conforme se observa no Quadro 5.23. Neste caso parece existir uma forte correlação positiva entre momentos  $M_y$  e  $M_x$  em função do método e da modelagem dos pilares internos. Assim como nos demais casos de estudo, os momentos desbalanceados dos modelos com pilar como apoio pontual resultaram menores que os dos demais modelos. Da mesma forma os momentos desbalanceados obtidos pelo método dos pórticos equivalentes apresentaram valores maiores que os observados pelos outros modelos. As forças de reação dos pilares são pouco maiores quando se olham os modelos pelo MPE. O coeficiente  $\alpha$ , que fornece a participação percentual dos momentos desbalanceados na tensão solicitantes de punção pela NBR 6118/14, dado pela [eq. 4.14], é obtido em função do Modelo 1 e apresentado abaixo. De forma semelhante ao caso de estudo do pilar B2-Q, a participação dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção ultrapassa a parcela da força de reação do pilar.

$$\alpha_{B2-R} = 51,3\%$$

As Figuras 5.19 a 5.20 apresentam os histogramas das forças de reação do pilar e os momentos desbalanceados  $M_y$  e  $M_x$ . O valor esperado dos esforços normais considerando todos os casos é menor que o valor de referência, puxado pelos modelos de molas, indicando uma média contra a segurança. Analisando as Figuras 5.19 e 5.20, observa-se que os valores esperados dos momentos desbalanceados em x e y estão acima do valor de referência, embora com uma variabilidade bastante elevada.

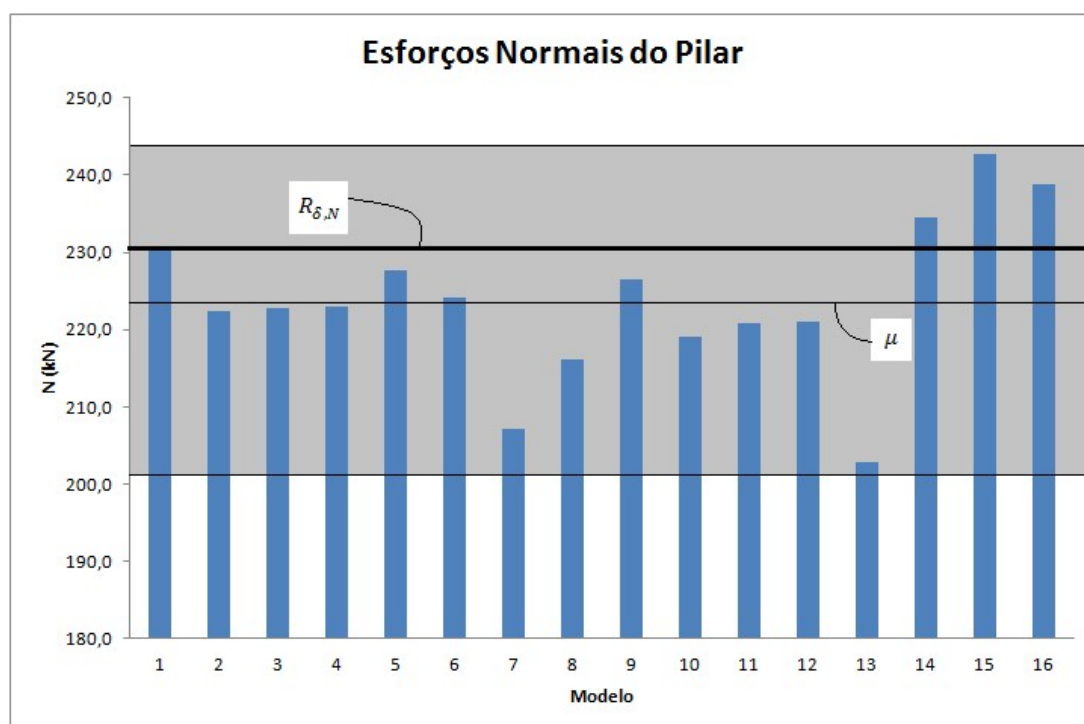


Figura 5.19 – Esforços normais do pilar para o caso B2-R

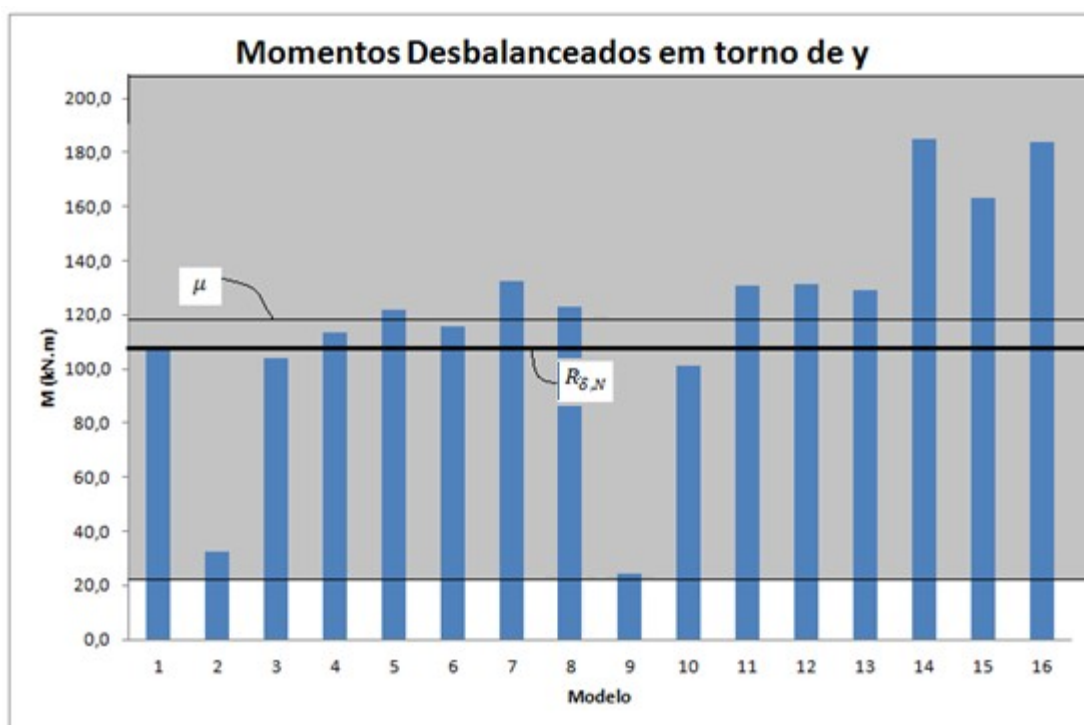


Figura 5.20 – Momentos desbalanceados em torno do eixo y da laje para o pilar B2-R

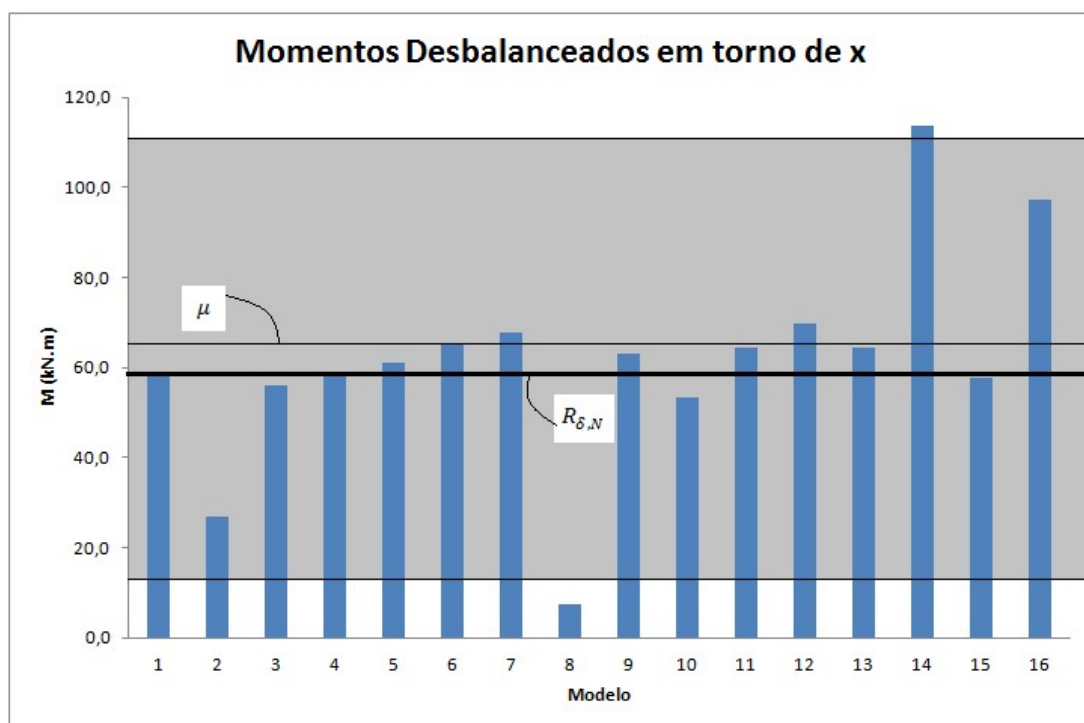


Figura 5.21 – Momentos desbalanceados em torno do eixo x da laje para o pilar B2-R

Levando em conta todos os 16 modelos, o cov da força N resultou 0,03, de My foi igual a 0,44 e de Mx igual a 0,42. Excluindo os modelos 2 e 9, obtém-se um cov para My igual a 0,31 e para Mx igual a 0,31. Excluindo apenas os modelos 14, 15 e 16, o cov resultou em 0,39 para My e 0,34 para Mx. Descartando os modelos 2, 9, 14, 15 e 16, o cov para My foi 0,19, enquanto que para Mx foi igual a 0,16. Percebe-se a grande variabilidade tanto nos momentos desbalanceados em ambos os eixos.

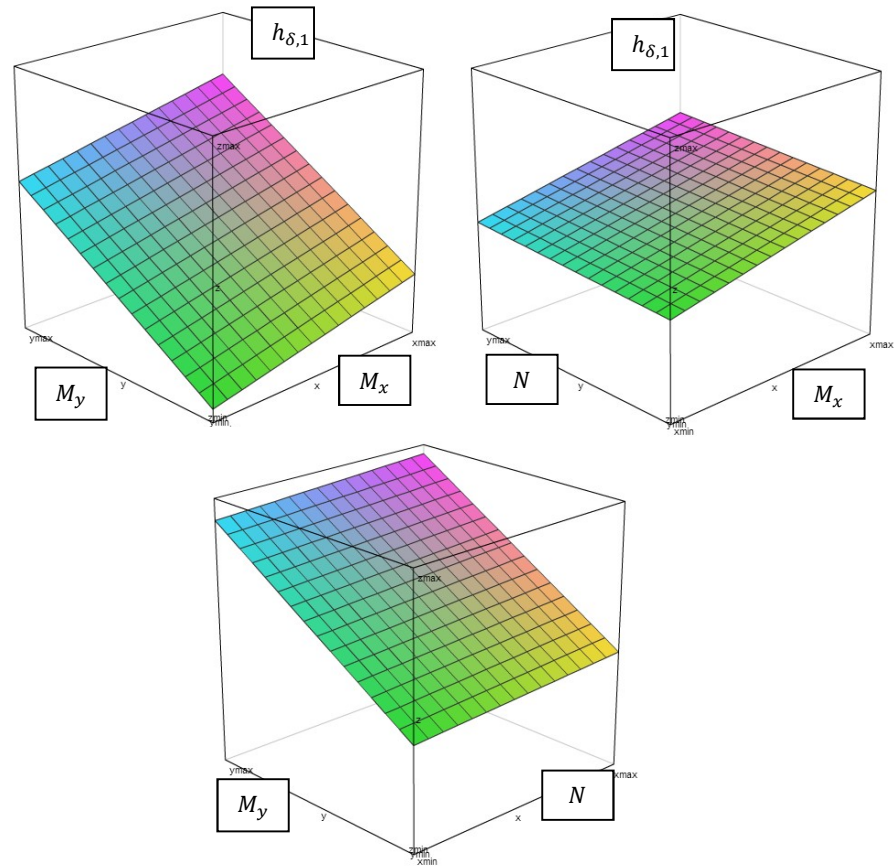
Para  $h_\delta$ , fez-se uma regressão linear múltipla, com variáveis independentes N, My e Mx com os valores de cálculo. O Quadro 5.24 apresenta os coeficientes da equação para o valor de  $h_\delta$ .

**Quadro 5.24 – Parâmetros de  $h_\delta$  para o caso do pilar B2-R**

			p-valor
R quadrado		1	1,3e-186
Coeficientes	Intercepto	0	-
	N	1,5098e-3	8,1e-171
	My	2,4707e-3	2,7e-179
	Mx	1,6608e-03	1,5e-174

$$\lambda_{\delta z}(N, M_y, M_x) = 1,5098 \cdot 10^{-3} \cdot N + 2,4707 \cdot 10^{-3} \cdot M_y + 1,6608 \cdot 10^{-3} \cdot M_x \quad [eq. 5.4]$$

O p-valor resultou proximo de zero, portanto o teste estatístico rejeita a hipótese nula, indicando que as variáveis independentes são significativas e que N, Mx e My não podem ser excluídas do modelo e são suficientes para explicar totalmente o valor de  $h_\delta$ . As Figuras 5.22 e 5.23 mostram os gráficos dos planos  $h_\delta$  formados pelas variáveis independentes duas a duas, mantendo a terceira variável fixa. O eixo z nas figuras representa  $h_\delta$ , onde adotou-se os valores limites de 0 e 1,25. Os eixos x e y representam as forças de reação N e os momentos desbalanceados My, respectivamente.



**Figura 5.22 – Variação de  $h_{\delta,1}$  para o pilar B2-R com todos os modelos**

Na Figura 5.22 são ilustradas as dispersões das variáveis independentes duas a duas, levando em conta os 16 modelos. Percebe-se que, apesar de  $M_y$  e  $M_x$  apresentarem altos coeficientes de variação, o impacto na dispersão em relação às tensões solicitantes de punção é muito mais acentuado no eixo de maior inércia ( $M_y$ ). Percebe-se que o plano  $N, M_y$  tem seu centro deslocado para cima com relação aos outros planos, indicando a maior importância destas variáveis na parcela da tensão solicitante de punção. Esta dedução fica muito mais clara quando se analisa a Figura 5.23.

Quando se excluem os modelos 2, 9, 14, 15 e 16, a dispersão diminui claramente, ainda que os momentos desbalanceados  $M_y$  se destaquem em relação às outras variáveis.

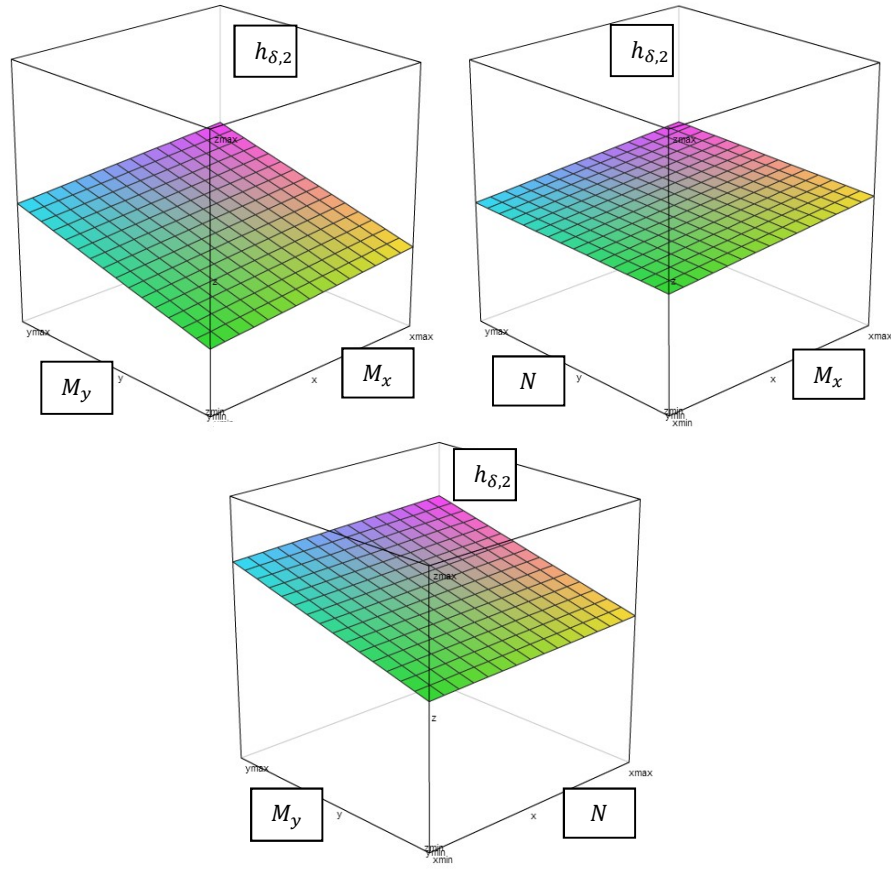


Figura 5.23 – Variação de  $h_{\delta,2}$  para o pilar B2-R sem modelos 2, 9, 14, 15 e 16

Para o intervalo considerado dos esforços,  $h_{\delta,1}$  variou de 0,514 a 1,453, enquanto que  $h_{\delta,2}$  variou de 0,768 a 1,156. Comparando aos demais casos de estudo, B2-R apresentou uma dispersão muito próxima da verificada no caso B2-Q. As dispersões observadas em  $h_{\delta,1}$  e  $h_{\delta,2}$  são maiores que as observadas nos casos A1-R e A2-R.

A curva de distribuição de probabilidades para o EMU  $\lambda_{\delta,1}$  é apresentada na Figura 5.24. A variável aleatória  $\lambda_{\delta,1}$  em função das tensões solicitantes para cada modelo é ajustada à uma curva Normal, onde se apresentam a média e o desvio padrão.

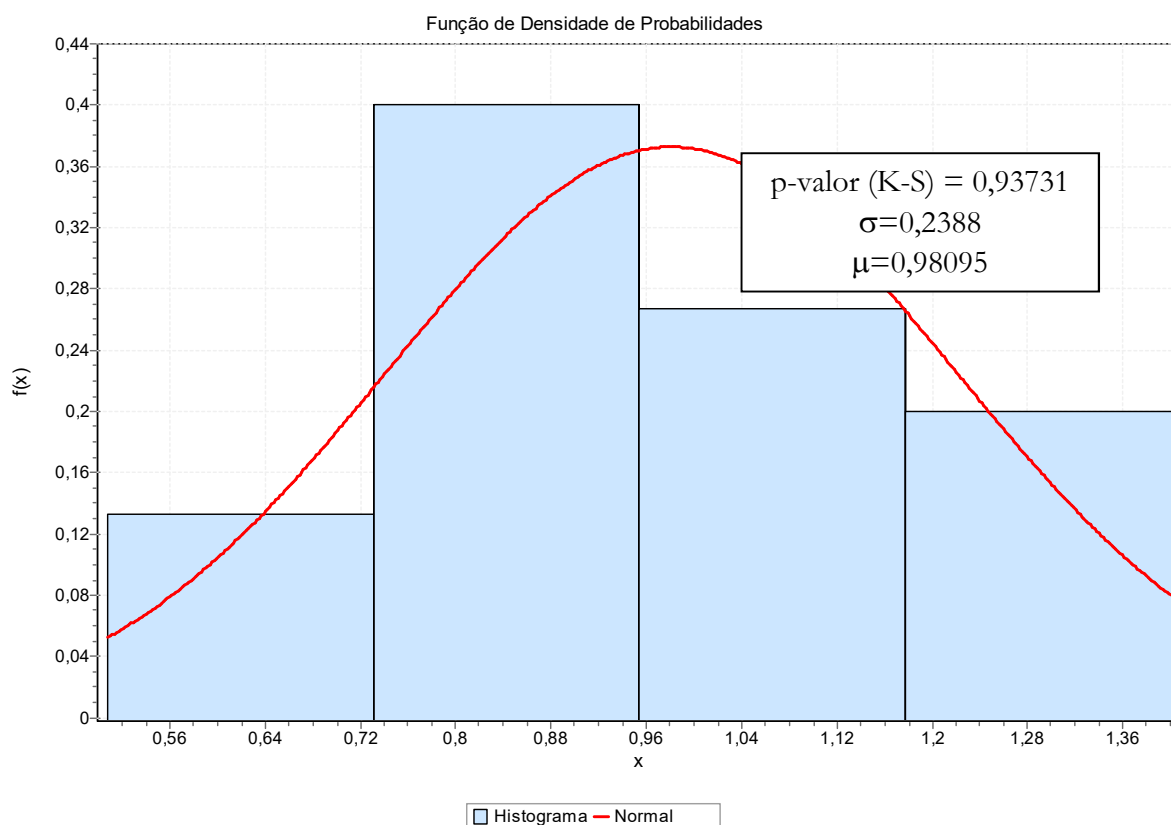


Figura 5.24 – Histograma de distribuição de probabilidades para  $\lambda_{\delta 1}$  para o pilar B2-Q.

#### 5.4.2 Estudo probabilístico do impacto das variabilidades na segurança

Para estimar os efeitos do EMU na estrutura estudada, faz-se um estudo de confiabilidade SORM- $\beta$  usando o *software* Rt (MAHSULI & HAUKAAS, 2013). Os dados para o cálculo são apresentados no Quadro 5.25. O EMU  $\lambda_{\delta 1}$  leva em conta a participação das forças de reação do pilar e dos momentos desbalanceados na lajes em função da tensão solicitante obtida pela equação da NBR 6118/2014.

Quadro 5.25 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Fator de segurança	Fator de segurança implícito na equação da tensão resistente da verificação da punção	$\xi$	Normal	0,187	0,02	-
Esforços	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga permanente	$N_G$	Normal	164,6	6,6	kN
	Parcela do esforço normal do pilar referente à carga accidental	$N_Q$	Gumbel	65,8	16,5	kN
Materiais	Resistência média do concreto	$f_c$	Normal	41,86	6,3	MPa
Geometria	Altura útil da laje	$d$	Normal	16,4	0,41	Cm
	Dimensão do lado $c_1$ do pilar	$c_1$	Normal	86,5	0,865	Cm
	Dimensão do lado $c_2$ do pilar	$c_2$	Normal	29,0	0,290	Cm
	Excentricidade da carga no pilar em cada eixo	$e_x$	Determinístico	47,18	-	Cm
	Excentricidade da carga no pilar em cada eixo	$e_y$	Determinístico	25,61	-	Cm
	Taxa de armadura negativa de flexão	$\rho$	Determinístico	0,0112	-	-
Variabilidades nos modelos	Incerteza de Modelo da JCSS	$\theta_1$	Lognormal	1,0	0,1	-
	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Normal	0,98095	0,2388	-

A Figura 5.25 mostra o gráfico de convergência de  $\beta$  para  $g(x)$ , onde os valores em vermelho do gráfico representam a convergência de  $\beta$ , enquanto os valores em azul a diferença da iteração anterior em relação à seguinte. O Quadro 5.26 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas de todos os modelos.

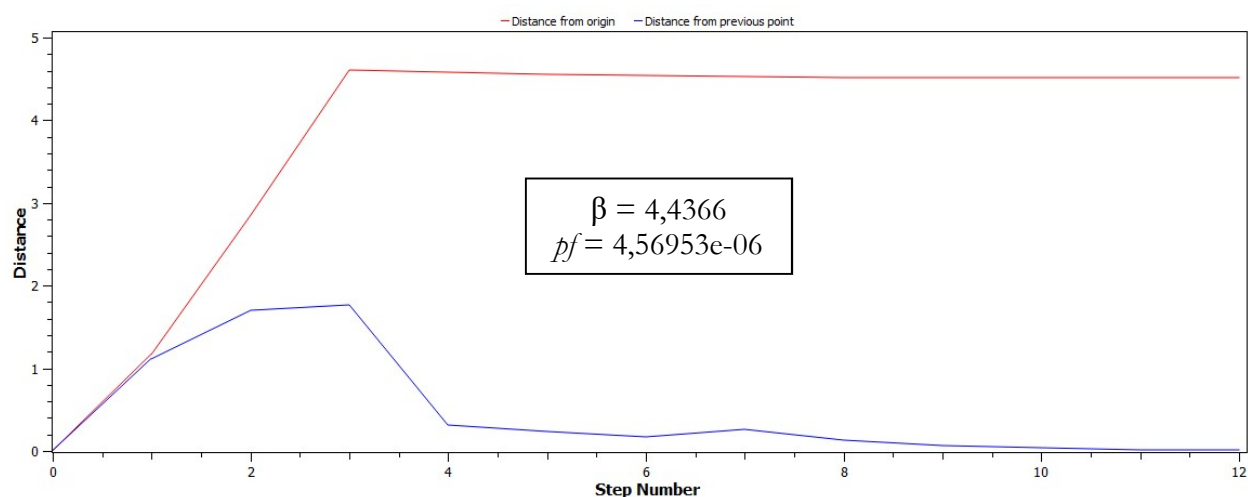


Figura 5.25 – Convergência de  $\beta$  para  $g(x)$  para o pilar B2-R.

**Quadro 5.26 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha para o pilar B2-R**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,44	4,57e-06
$g'_1(x)$	$\Theta_1$	3,98	3,41e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	2,12	1,68e-02

A grande variabilidade e participação dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção (valor  $\alpha$ ), resultou em uma probabilidade de falha muito maior em relação ao erro de modelo da JCSS (2001), sendo o menor valor de  $\beta$  dos quatro casos de estudo. Percebe-se que a variável dos momentos desbalanceados no eixo de maior inércia  $M_y$  do pilar interno têm uma participação muito maior na probabilidade de falha que as outras variáveis  $M_x$  e  $N$ . Isto se dá pelo maior coeficiente de variação, pela maior excentricidade de  $M_y$  em relação a  $M_x$  e em função do coeficiente de correlação positivo e próximo de 1 entre as variáveis.

Desconsiderando os esforços obtidos pelos modelos com pilares modelados como apoios pontuais (modelos 2 e 9), tem-se os seguintes dados para as incertezas de modelo EMU (Quadro 5.27):

**Quadro 5.27 – EMU para o pilar B2-R desconsiderando esforços obtidos pelo modelo de apoio pontual**

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Variabilidades nos modelos	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Gumbel (p-valor=0,938)	0,96	0,14424	-

Da mesma forma, calcularam-se os coeficiente de correlação de Pearson para cada par das variáveis  $N_d$ ,  $M_{y,d}$  e  $M_{x,d}$ . Verificaram-se as correlações lineares por teste de hipótese, com hipótese nula considerando as variáveis não correlacionadas. Com significância de 5% e 12 graus de liberdade, usando como referência a distribuição t de Student, o valor absoluto mínimo para rejeitar a hipótese nula é de 2,179, considerando teste bilateral. Rejeitou-se a hipótese nula apenas para a correlação entre  $M_{y,d}$  e  $M_{x,d}$ , com um coeficiente de correlação igual a 0,885 e t calculado igual a 6,602.

O Quadro 5.28 apresenta os valores dos casos considerando as incertezas dos modelos sem a consideração dos modelos com apoio pontual.



**Quadro 5.28 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar B2-R**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,44	4,57e-06
$g'_1(x)$	$\theta_1$	3,98	3,41e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	3,57	1,77e-04

Desconsiderando os modelos 2 e 9, a variabilidade dos demais modelos não é adequada para obtenção dos esforços para punção. Na sequência, desconsideram-se os esforços obtidos pelos modelos 14, 15 e 16 e os modelos de pilar como apoio pontual (modelos 2 e 9), onde se obtêm novos dados para as incertezas de modelo EMU (Quadro 5.29):

**Quadro 5.29 – EMU para o pilar B2-R desconsiderando pórticos equivalentes e apoio pontual**

Categoria	Descrição	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio padrão	Unidade
Variabilidades nos modelos	EMU referente à variabilidade entre as tensões solicitantes	$\lambda_{\delta 1}$	Gumbel (p-valor=0,996)	0,91646	0,07252	-

Calculando os coeficiente de correlação de Pearson para cada par das variáveis  $N_d$ ,  $M_{y,d}$  e  $M_{x,d}$ , fizeram-se as verificações das correlações lineares por teste de hipótese, com hipótese nula considerando as variáveis não correlacionadas. Com significância de 5% e 9 graus de liberdade, usando como referência a distribuição t de Student, o valor absoluto mínimo para rejeitar a hipótese nula é de 2,262, considerando teste bilateral. Rejeitou-se a hipótese nula apenas para a correlação entre  $M_{y,d}$  e  $M_{x,d}$ , com um coeficiente de correlação igual a 0,989 e t calculado igual a 20,199.

O Quadro 5.30 apresenta os valores das probabilidades de falha considerando as incertezas dos modelos sem a consideração dos métodos dos pórticos equivalentes e modelos com apoio pontual.

**Quadro 5.30 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar B2-R**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,44	4,57e-06
$g'_1(x)$	$\theta_1$	3,98	3,41e-05
$g'_2(x)$	$\lambda_{\delta 1}$	3,79	7,45e-05

Desconsiderando os modelos 2, 9, 14, 15 e 16, ainda existe uma probabilidade de falha aproximadamente 118% maior que a estimada pelo erro de modelo da JCSS (2001). Os modelos com pilar como apoio pontual afastam os valores dos esforços obtidos pelos demais modelos, aumentando suas variabilidades. A configuração com pilar retangular na posição B2 foge de uma laje

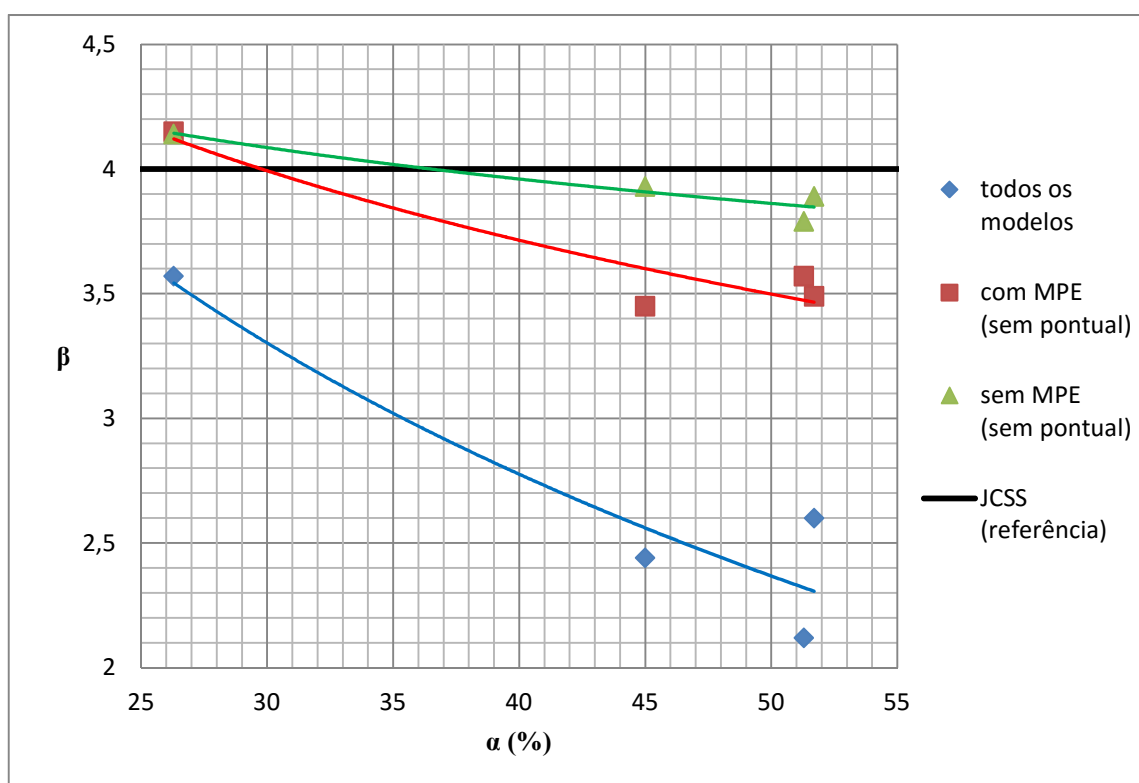
com pilares dispostos ortogonalmente e com vãos pouco diferentes, resultando no método dos pórticos equivalentes não sendo adequado para obtenção dos esforços para verificação da punção neste caso. No entanto, mesmo após a exclusão dos modelos 2, 9, 14, 15 e 16 na análise, a probabilidade de falha obtida com os EMUs resultou maior que a obtida pela incerteza de modelo do JCSS.

## 5.5 Conclusões da abordagem sobre os esforços solicitantes (N e M)

Observando os esforços obtidos por algumas modelagens de pilar e diferentes métodos de análise, verificou-se uma grande variabilidade nos resultados nos quatro casos de estudo. Não se obtiveram grandes coeficientes de variação nos esforços normais dos pilares, mas os momentos desbalanceados podem variar consideravelmente, o que consequentemente poderia impactar na qualidade das verificações da punção pela NBR 6118/14. Entre os métodos de cálculo, o método dos elementos finitos tende a fornecer momentos desbalanceados superiores aos obtidos por analogia de grelha, enquanto que os métodos dos pórticos equivalentes fornecem valores maiores de momentos desbalanceados que o MEF. As forças de reação dos pilares não apresentam nenhuma tendência quanto ao método ou quanto à modelagem dos pilares. Quanto aos momentos desbalanceados, as modelagens considerando pilar como apoio pontual, devido ao problema da singularidade, apresentaram valores bastante inferiores aos demais modelos nos quatro casos de estudo. As demais modelagens não apresentaram tendências quanto às variabilidades. Em todos os casos de estudo, a participação dos momentos desbalanceados apresentaram coeficientes de variação muito elevados, mesmo quando se excluíram os modelos mais distantes da média. No caso de pilar com diferentes inércias e com momentos desbalanceados nas duas direções, a direção de maior inércia foi a dominante.

As incertezas de modelo foram consideradas de modo a analisar a variabilidade dos esforços na verificação da punção. Nos estudos probabilísticos, o caso de estudo A1-R foi o único onde os métodos dos pórticos equivalentes seriam adequados para obter os esforços solicitantes para verificação da punção. Neste caso de estudo, a participação dos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção foi inferior aos demais casos, com um valor de  $\alpha$  próximo de 25%. Nenhum dos casos de modelos considerando pilar como apoio pontual forneceram resultados adequados. Nos demais casos de estudo, onde a participação dos momentos desbalanceados (valor de  $\alpha$ ) foi maior, os modelos onde se usou o método dos pórticos equivalentes não apresentaram bons resultados. No entanto, mesmo quando se desconsideraram estes modelos (modelos 2, 9, 14, 15 e 16), os valores de  $\beta$  na análise probabilística foram inferiores aos obtidos pelo erro de modelo do JCSS (2001), o que indicaria que a variabilidade entre os demais modelos ainda poderia afetar a segurança na verificação da punção a partir de uma certa participação dos momentos desbalanceados na ligação.

De modo a visualizar a influência da participação dos momentos desbalanceados - através do coeficiente  $\alpha$  - na segurança da estrutura, com relação ao índice de confiabilidade  $\beta$ , apresenta-se o diagrama da Figura 5.26.



**Figura 5.26 – Diagrama coeficiente  $\alpha$  versus índice de confiabilidade  $\beta$**

As curvas são obtidas dos EMUs dos quatro casos de estudo, nas seguintes situações: onde são considerados todos os modelos; onde são excluídos os modelos de pilar como apoio pontual; e onde são excluídos os modelos de pilar como apoio pontual e os modelos calculados pelos métodos dos pórticos equivalentes. Como referência, adotou-se o valor aproximado dos índices de confiabilidade obtidos com o erro de modelo do JCSS (2001). Percebe-se que, quando se usam os esforços solicitantes, os modelos de pilar como apoio pontual não deveriam ser considerados em nenhuma situação para a verificação da punção com momentos desbalanceados. O método dos pórticos equivalentes poderiam ser usado em casos onde os momentos desbalanceados representassem até 30% das tensões solicitantes totais de punção. No entanto, mesmo quando se mantêm apenas as análises numéricas, as variabilidade poderiam influenciar a qualidade dos resultados. Pode-se observar na Figura 5.26 que a consideração destes modelos seriam adequadas até um coeficiente  $\alpha$  de aproximadamente 37%. Desta forma, os resultados levam a acreditar que configurações onde a participação dos momentos desbalanceados começam a ser predominantes na análise da punção deveriam ter suas análises limitadas a métodos e/ou modelagens específicas que melhor representassem os resultados fornecidos pelas equações da NBR 6118/14.

## 6 *Estudo das tensões solicitantes de punção por modelo numérico*

Nesta segunda abordagem do trabalho, apresentam-se os estudos das tensões solicitantes de cisalhamento ao longo do perímetro crítico a 2d da face do pilar de modo a compará-las com as tensões solicitantes de punção fornecidas pelas equações da NBR 6118/14. São propostas três análises, comentadas na sequência.

Inicialmente são exibidos diagramas de distribuição de tensões de cisalhamento ao longo do perímetro crítico obtidos de análises lineares dos modelos numéricos, que são comparados à distribuição de tensões constante sugerida pela NBR 6118/14, quando da ação de momentos desbalanceados. Sendo assim, os casos analisados levam em conta apenas a ação de momentos desbalanceados em pilares internos. Com isso, pretende-se comparar qualitativamente a relação entre os métodos de obtenção de tensões em função dos seus diagramas de tensão de cisalhamento.

Na sequência é feita uma análise subjetiva do que se julga ser a modelagem usual na prática de projeto para análise da punção quando se usam as tensões solicitantes no perímetro crítico de um modelo numérico. Desta forma, considera-se que todas as modelagens propostas no capítulo 4 são permissíveis, levando em conta que não existem limitações normativas quanto à modelagem dos pilares. Da mesma forma consideraram-se apenas as malhas mais grossas, por conta do menor tempo de processamento, facilidade na modelagem e a ausência de limitações normativas. Assim, pretende-se replicar uma situação possível (e que se julga provável) de projeto. O impacto na segurança desta análise é feita através de cálculo da probabilidade de falha e índice de confiabilidade  $\beta$  pelo método SORM, onde são definidas as variáveis incertezas de modelo EMU em função das tensões médias e das tensões máximas de cisalhamento, obtidas por todos os modelos com malhas de 50x50cm e 25x25cm.

A terceira análise tem como finalidade verificar quais modelagens de pilar e qual refinamento de malha fornecem tensões de cisalhamento que melhor se ajustam às fornecidas pela NBR 6118/14. A adequabilidade do modelo e da malha são analisados através do impacto na segurança pelo índice de confiabilidade  $\beta$  obtido pelo método SORM. Definem-se então os EMU  $\lambda_{\tau i}$ , ajustando a uma curva de distribuição de probabilidades, com uma média e um desvio padrão, os valores das tensões médias e máximas de cisalhamento obtidas para cada modelagem de pilar e cada refinamento de malha em função das respectivas tensões solicitantes fornecidas pela NBR 6118/14 (conforme item 4.1.2).

## 6.1 Estudo das tensões no perímetro crítico

Neste item são apresentados os diagramas dos esforços cortantes e as tensões solicitantes no perímetro crítico  $c'$  da NBR 6118/14, obtidos da análise linear por elementos finitos. Adotaram-se os modelos considerando pilar modelado com trecho rígido e modelado como apoio pontual por serem bastante representativos em relação ao efeito da singularidade. Para cada exemplo são apresentados os diagramas para malhas de 6x6cm e 50x50cm de modo a verificar a importância do refinamento nesta metodologia de análise. Os casos neste item consideram apenas a ação de momentos desbalanceados, explorando momentos em um ou dois eixos, a altura da laje e a retangularidade dos pilares, comparando os diagramas de tensões de cisalhamento nos modelos numéricos com a distribuição de tensões de punção proposta pela NBR 6118/14.

### 6.1.1 Pilar de seção quadrada modelado com trecho rígido com $h=16\text{cm}$ e $M_y = 45\text{kN.m}$

Apresenta-se uma análise de um pilar com seção quadrada, com lado igual a 50cm, sujeito a um momento de 45kN.m e modelado com trecho rígido. A altura da laje é de 16cm e a altura útil é de 12cm. As Figuras 6.1 e 6.2 ilustram os esforços cortantes  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  em kN/m para uma malha de 6x6cm e 50x50cm, respectivamente.

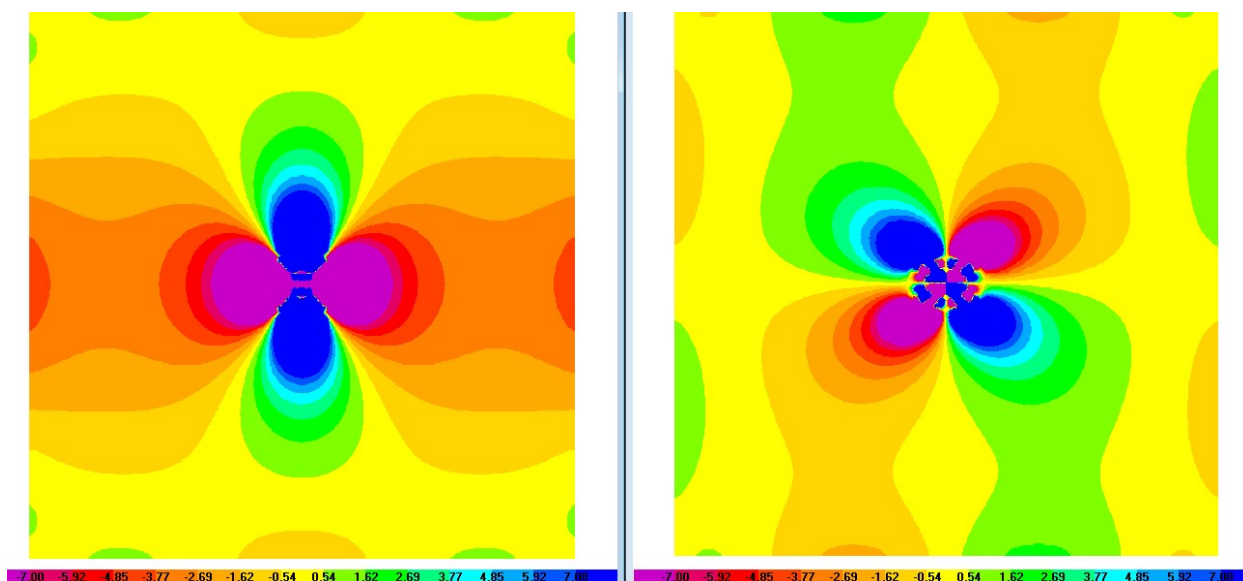


Figura 6.1 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m) para malha de 6x6cm

Percebe-se que o refinamento da malha melhora bastante a qualidade e a uniformidade dos resultados dos esforços cortantes nas proximidades dos pilares. A adoção da malha muito aberta fez com que os esforços cortantes perdessem a simetria na região do pilar, além de apresentar picos de esforços cortantes que não representariam adequadamente a distribuição das tensões no perímetro de controle. A Figura 6.3 mostra a distribuição das tensões solicitantes à distância de  $2d$  da face do pilar considerando a altura útil da laje.

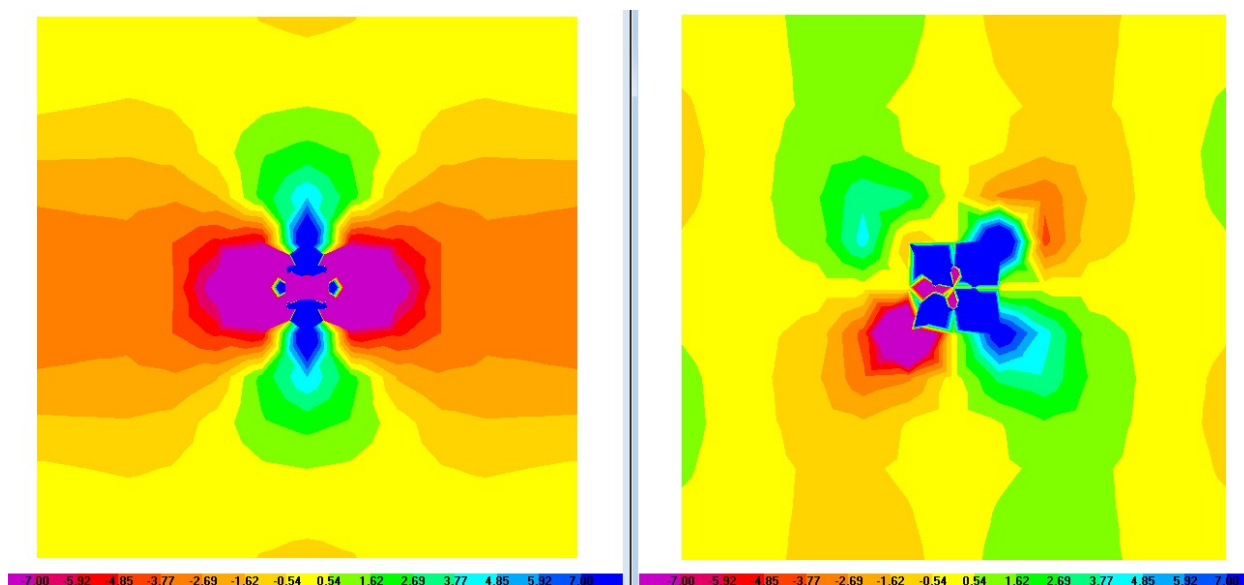


Figura 6.2 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m) para malha de 50x50cm

Na Figura 6.3 as tensões solicitantes obtidas pela NBR 6118/14 são indicadas pelos diagramas em vermelho internamente, e as tensões solicitantes de cisalhamento obtidas pelo modelo numérico são indicadas em azul externamente no perímetro crítico a 2d da face do pilar.

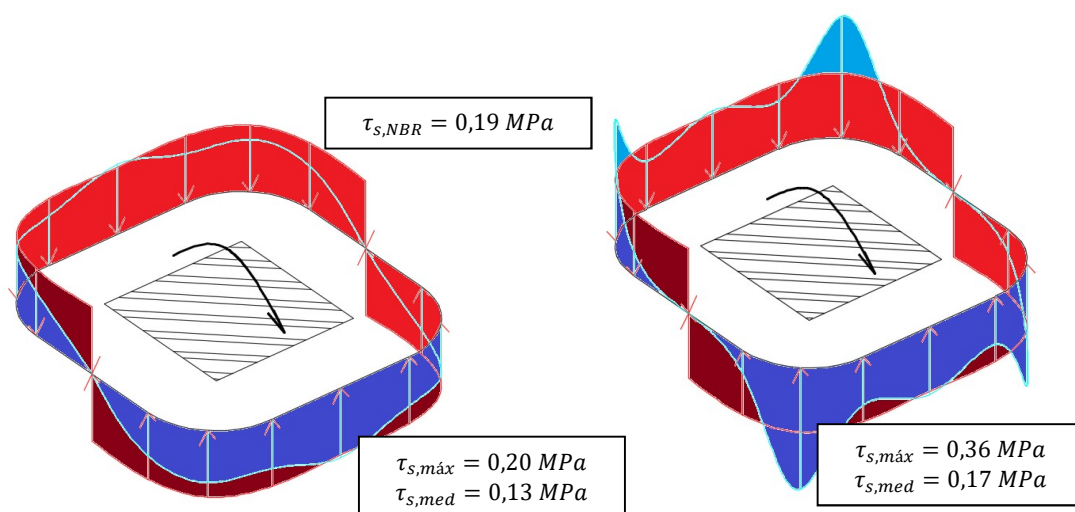


Figura 6.3 – Tensões solicitantes no perímetro crítico, malhas de 6x6cm e 50x50cm respectivamente

Percebe-se que o modelo com malha mais fina (6x6cm) apresenta resultados muito próximos dos fornecidos pela NBR 6118/14 e a favor da segurança quando se consideram as tensões solicitantes máximas. Já o modelo com malha mais espessa (50x50cm) apresenta picos de tensões máximas muito acima das fornecidas pela NBR 6118/14. A malha mais espessa fornece inclusive pontos diferentes dentro do perímetro de controle onde ocorre a máxima tensão de cisalhamento. No modelo com malha fina estas ocorreram nos pontos 5 e 13, enquanto que no modelo com malha 50x50cm, as tensões máximas ocorreram nos pontos 3, 7, 11 e 15. As tensões médias obtidas pelo modelo numérico não seriam adequadas para utilizar em conjunto às tensões resistentes fornecidas pela NBR 6118/14. Para um caso similar, alterando apenas o momento



desbalanceado para  $M_y = 450 \text{ kN.m}$ , foram observados os mesmos comportamentos deste caso.

### 6.1.2 Pilar de seção quadrada modelado como apoio pontual com $h=16\text{cm}$ e $M_y=45\text{kN.m}$

Neste caso é apresentada uma análise de um pilar idêntico ao do item 6.1.1, com exceção deste ser modelado como apoio pontual, portanto sujeito ao problema da singularidade quando da análise dos momentos negativos. A altura da laje é mantida em 16cm e a altura útil em 12cm. As Figuras 6.4 e 6.5 apresentam os esforços cortantes  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  em kN/m para uma malha de 6x6cm (Figura 6.4) e 50x50cm (Figura 6.5).

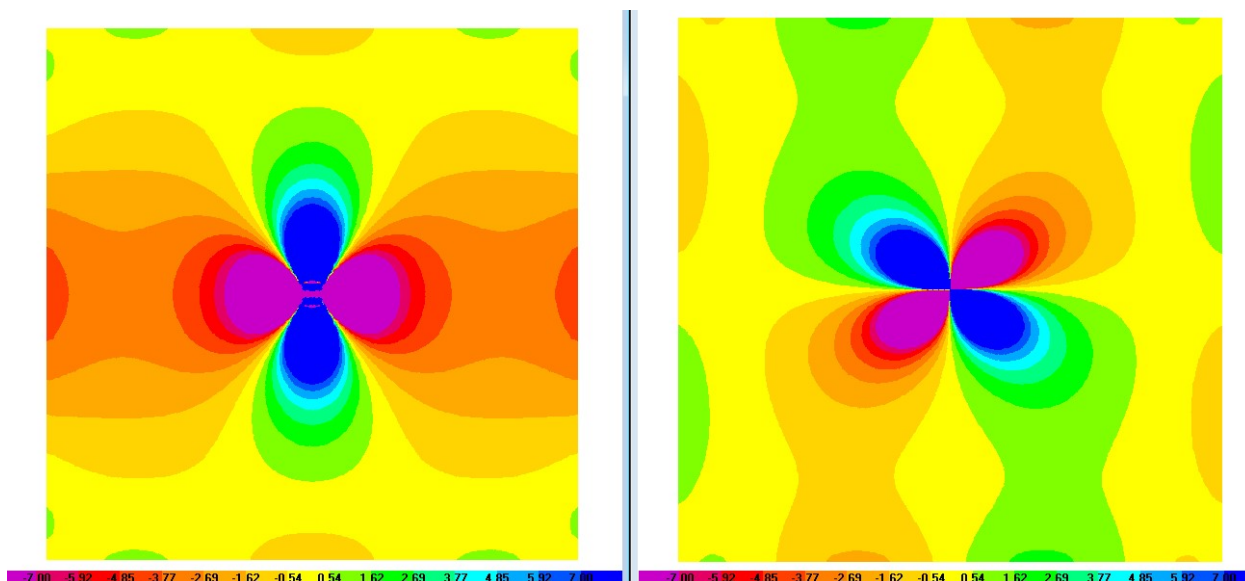


Figura 6.4 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m) para malha de 6x6cm

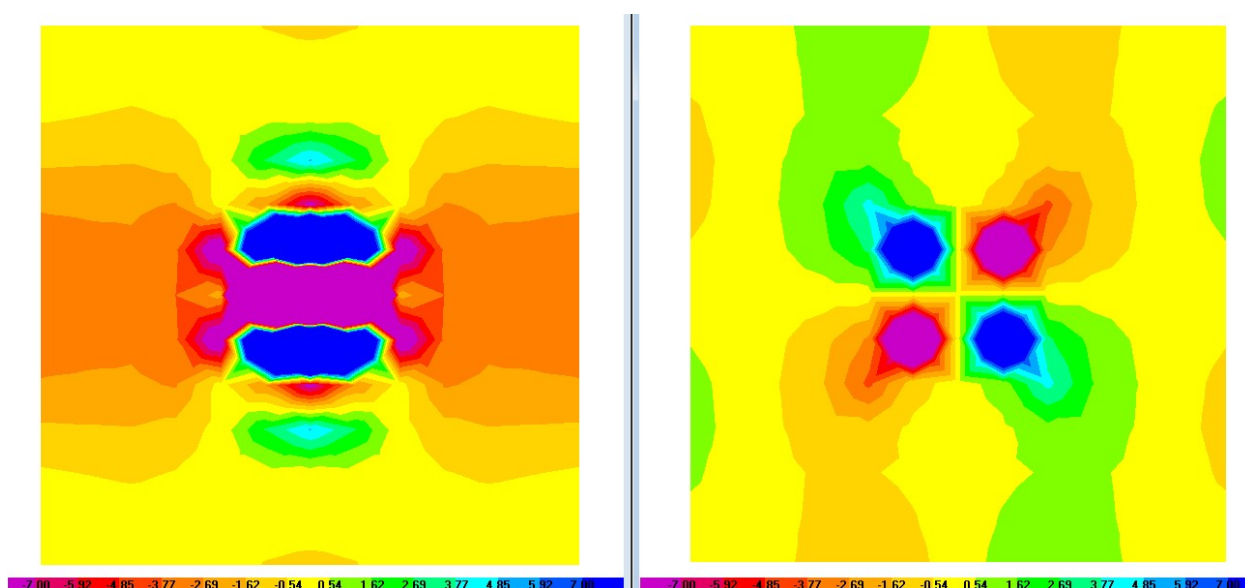


Figura 6.5 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m) para malha de 50x50cm

Percebe-se que o refinamento da malha melhora bastante a qualidade dos esforços

cortantes nas proximidades dos pilares, embora a uniformidade para uma malha mais grossa seja superior a obtida pelo modelo com trecho rígido. O modelo com malha mais grossa apresenta picos de esforços cortantes muito maiores que os fornecidos pela NBR 6118/14. A Figura 6.6 ilustra a distribuição das tensões solicitantes a distância de  $2d$  da face do pilar considerando a altura útil da laje. Percebe-se que o modelo com malha mais fina ( $6 \times 6 \text{ cm}$ ) mostra resultados muito próximos dos fornecidos pela NBR 6118/14 quando se consideram as tensões solicitantes máximas, mesmo em se modelando o pilar como apoio pontual. O modelo com malha  $50 \times 50 \text{ cm}$  mostra picos de tensão máximas bem acima das fornecidas pela NBR 6118/14, embora nos mesmos pontos do perímetro de controle, 5 e 13. Para este caso específico a tensão solicitante máxima do modelo numérico, considerando o pilar modelado como apoio pontual, seria adequada e a favor da segurança para a verificação da punção quando se considera uma malha fina. Isso se dá devido à distância de  $2d$  do apoio amenizar o problema da singularidade que se obteria nos esforços cortantes em  $V_{xz}$ .

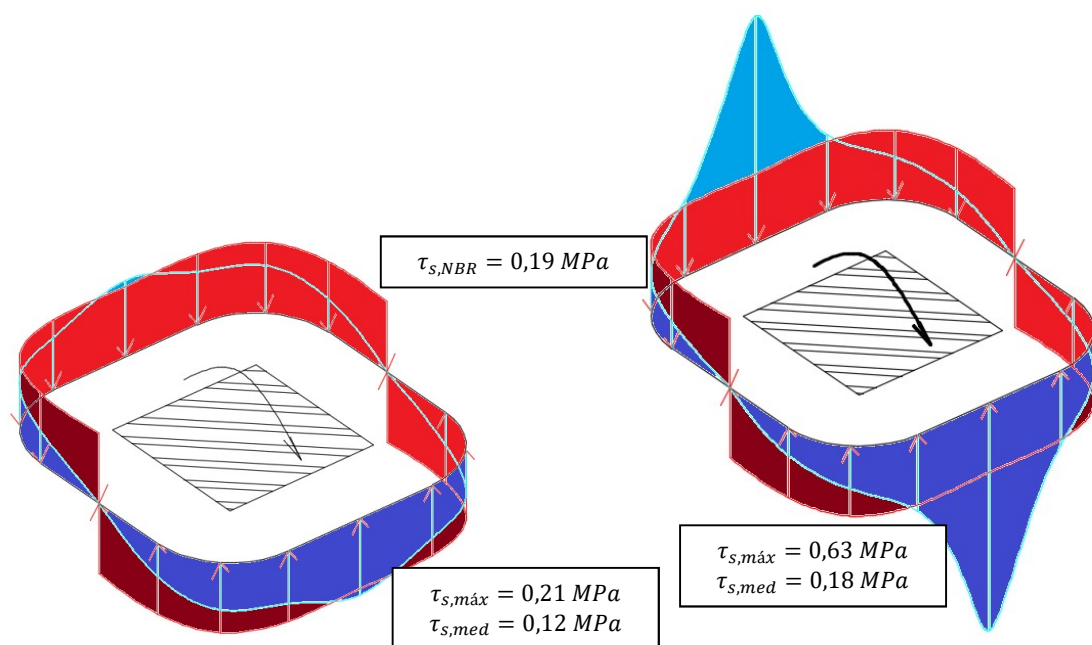


Figura 6.6 – Tensões solicitantes no perímetro crítico, malhas de  $6 \times 6 \text{ cm}$  e  $50 \times 50 \text{ cm}$  respectivamente

### 6.1.3 Pilar com seção quadrada modelado com trecho rígido com $h=16 \text{ cm}$ e $M_y=M_x=45 \text{ kN.m}$

Apresenta-se uma análise de um pilar com seção quadrada, com lado igual a  $50 \text{ cm}$ , sujeito a momentos de  $45 \text{ kN.m}$  nas duas direções principais de inércia e modelado com trecho rígido. A altura da laje é de  $16 \text{ cm}$  e a altura útil é de  $12 \text{ cm}$ . As Figuras 6.7 e 6.8 apresentam os esforços cortantes  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  em  $\text{kN/m}$  para uma malha de  $6 \times 6 \text{ cm}$  e  $50 \times 50 \text{ cm}$ , respectivamente.



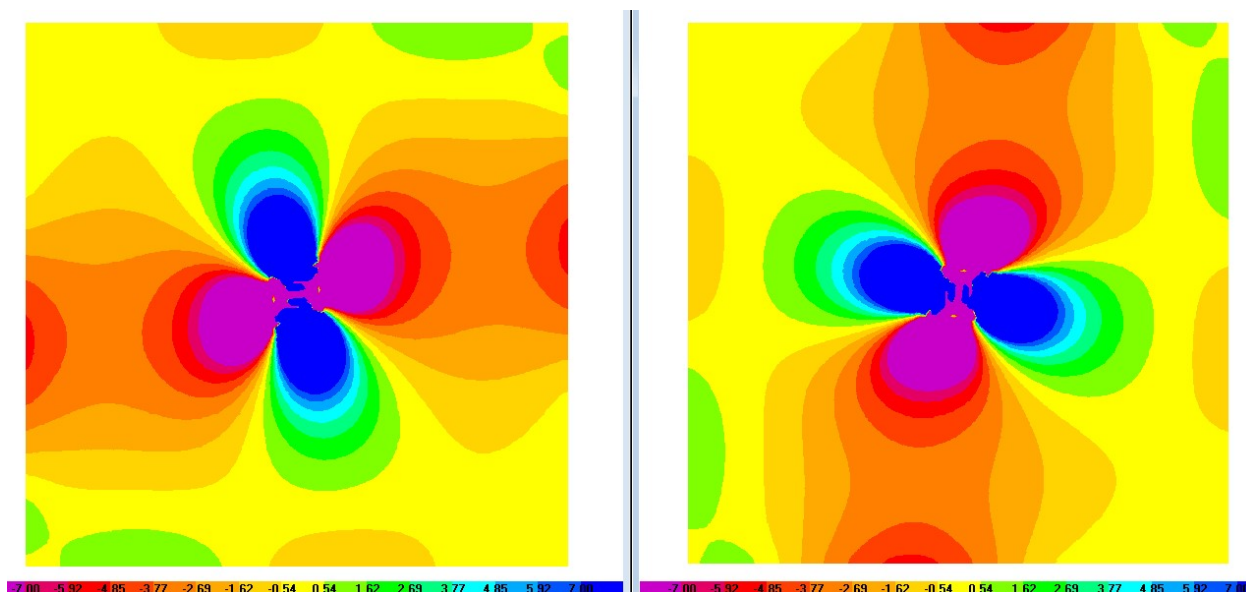


Figura 6.7 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m), malha 6x6cm

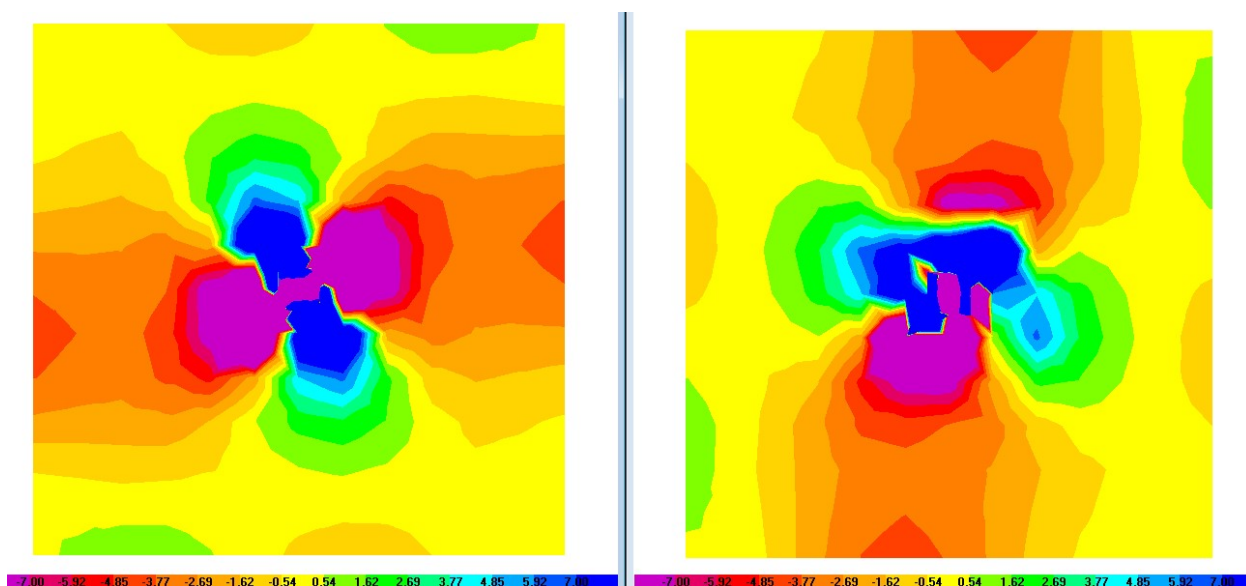


Figura 6.8 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m), malha 50x50cm

Os resultados dos esforços cortantes nas proximidades dos pilares têm uma melhora visível da qualidade e na uniformidade com o refinamento da malha quando se comparam as malhas de 6x6cm e 50x50cm. Neste exemplo os esforços cortantes  $V_{yz}$  não mostra qualquer simetria. A Figura 6.9 ilustra a distribuição das tensões solicitantes a distância de  $2d$  da face do pilar considerando a altura útil da laje.

Neste exemplo, onde existem momentos desbalanceados nos dois eixos, observa-se que o modelo com malha mais fina (6x6cm) exibe resultados de tensões máximas inferiores às obtidas pela NBR 6118/14, estando portanto contra a segurança. Já o modelo com malha mais espessa (50x50cm) apresenta picos de tensão máximas bem acima das fornecidas pela NBR 6118/14.

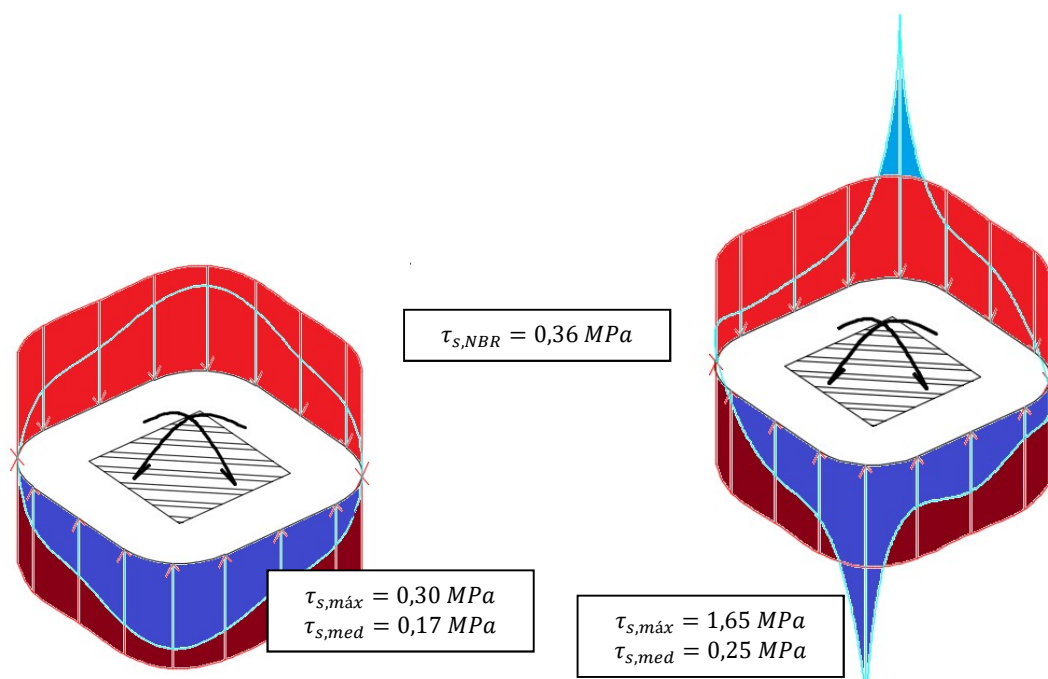


Figura 6.9 – Tensões solicitantes no perímetro crítico para modelos com malhas de 6x6cm e 50x50cm

#### 6.1.4 Pilar com seção quadrada modelado com trecho rígido com $h=30\text{cm}$ e $M_y=45\text{kN.m}$

Neste item é apresentada a análise de pilar com seção quadrada e lado igual a 50cm, sujeito a um momento  $M_y = 45\text{kN.m}$ , modelado com trecho rígido. A altura da laje neste exemplo é de 30cm e a altura útil é de 26cm. A intenção é analisar a relação das proporcionalidades entre a altura da laje e a área da seção transversal do pilar. As Figuras 6.10 e 6.11 apresentam os esforços cortantes  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  em kN/m para uma malha de 6x6cm e 50x50cm, respectivamente.

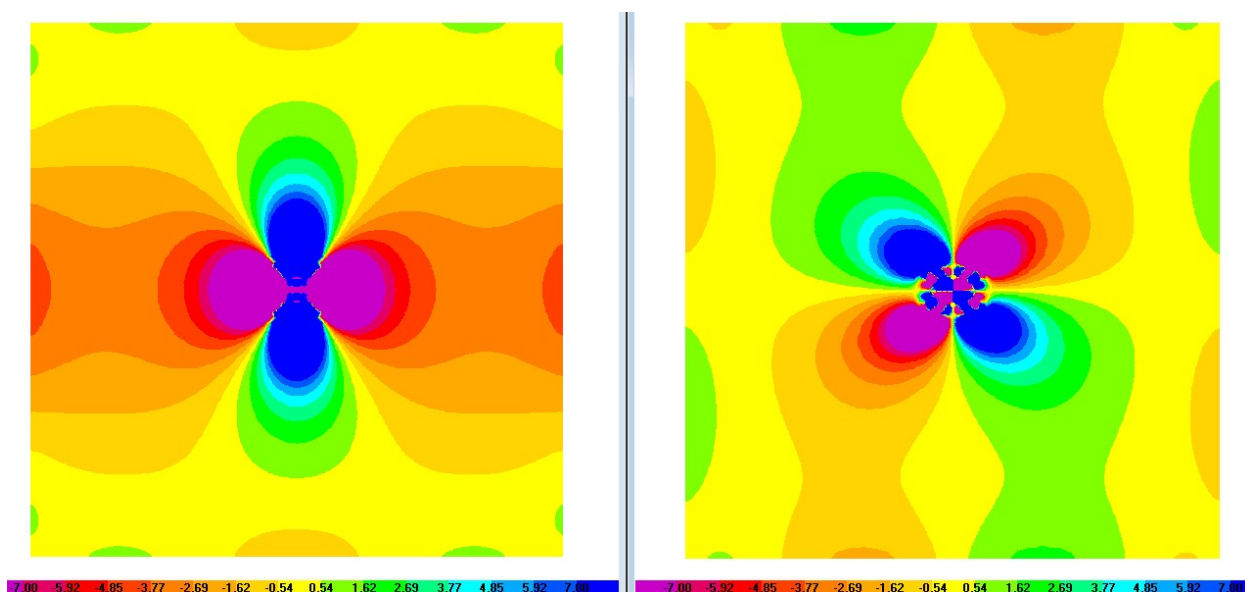


Figura 6.10 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m), malha 6x6cm

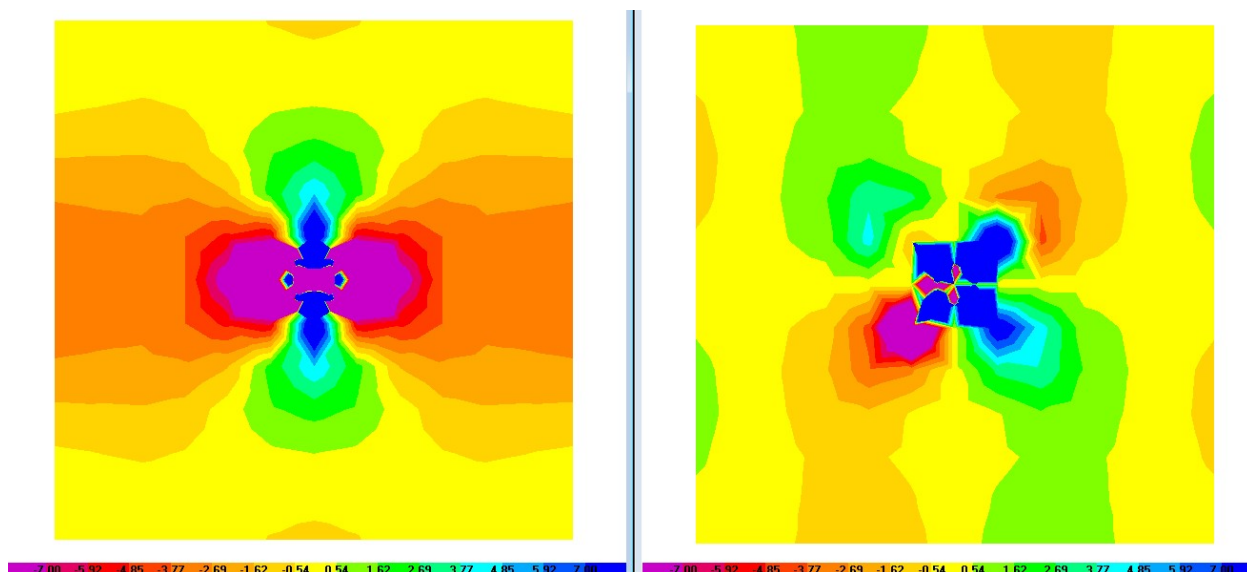


Figura 6.11 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m) malha 50x50cm

O refinamento da malha novamente melhora a uniformidade dos resultados, onde se observa a falta de simetria dos esforços cortantes  $V_{yz}$  no modelo com malha 50x50cm.

Com uma maior altura útil da laje, a distância da face do pilar aumenta e os diagramas de tensões de cisalhamento são mais uniformes, mesmo para a malha de 50x50cm, como pode ser observado na Figura 6.12. O modelo com malha 6x6cm apresenta resultados de tensões máximas bastante próximas às fornecidas pela NBR 6118/14, a favor da segurança. No modelo com malha 50x50cm, o pico de tensões não resulta tão acentuado como nos casos anteriores, sendo medido nos mesmos pontos do perímetro crítico (pontos 5 e 13).

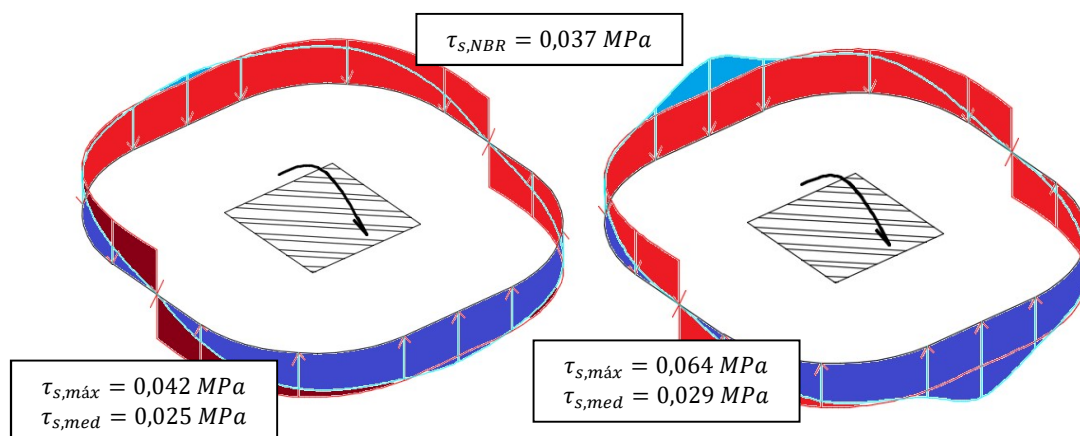


Figura 6.12 – Tensões solicitantes no perímetro crítico para malhas de 6x6cm e 50x50cm, respectivamente

### 6.1.5 Pilar com seção retangular modelado com trecho rígido com $h=16\text{cm}$ e $M_y=45\text{kN.m}$

Este caso apresenta uma análise de um pilar com seção retangular, com lados iguais a 70,5cm e 35,5cm, sujeito a um momento  $M_y$  de 45kN.m em torno do eixo de maior inércia e

modelado com trecho rígido. A altura da laje é de 16cm e a altura útil é de 12cm. As Figuras 6.13 e 6.14 mostram os esforços cortantes  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  em kN/m para uma malha de 6x6cm e 50x50cm, respectivamente.

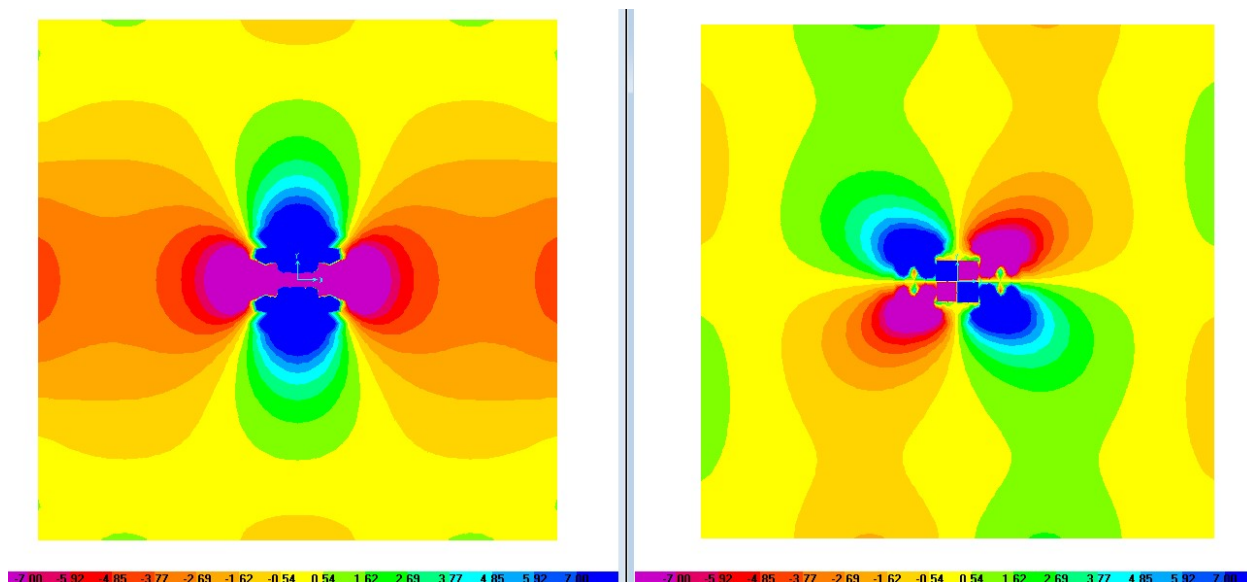


Figura 6.13 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m), malha 6x6cm.

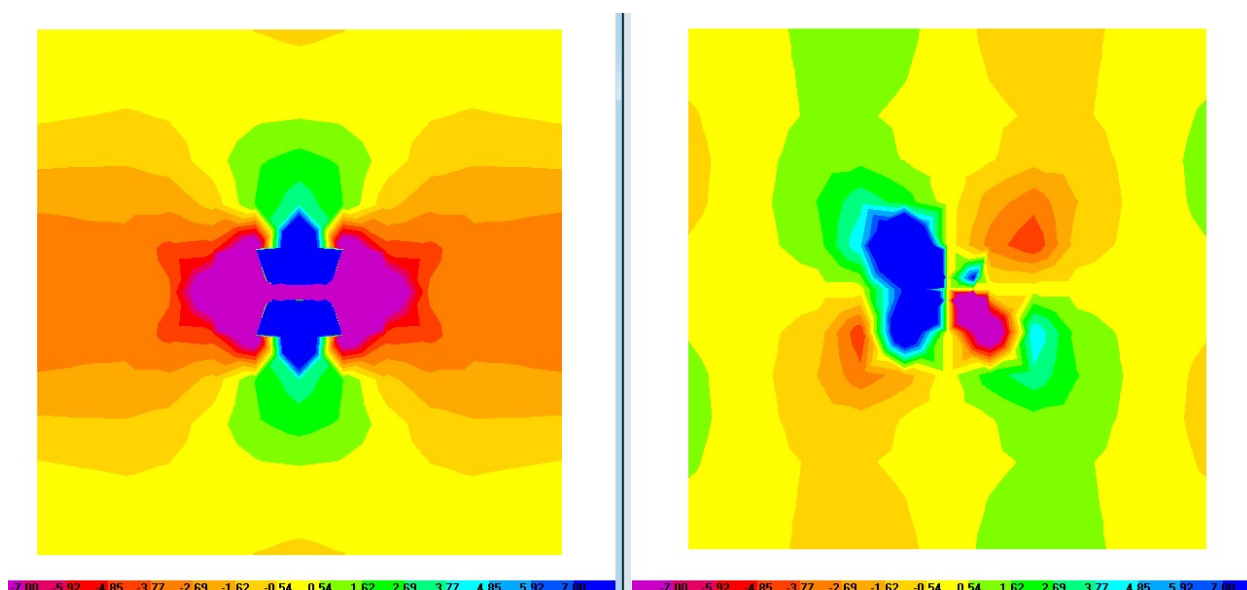


Figura 6.14 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m), malha 50x50cm

O modelo com malha mais fina (6x6cm) apresenta resultados muito próximos dos fornecidos pela NBR 6118/14 e a favor da segurança quando se consideram as tensões solicitantes máximas. O modelo com malha mais espessa (50x50cm) exibe picos de tensões máximas pouco acima das fornecidas pela NBR 6118/14 e nos mesmos pontos onde se obtiveram as do modelo com malha 6x6cm (pontos 5 e 13). Apesar da seção retangular do pilar e momento desbalanceado no eixo de maior inércia, as tensões de cisalhamento dos modelos numéricos forneceram valores máximos adequados, a favor da segurança, independente da malha utilizada, mas com melhor



resultado sendo o fornecido pelo modelo com malha fina. As tensões médias em ambos modelos resultaram abaixo da obtida pela NBR 6118/14.

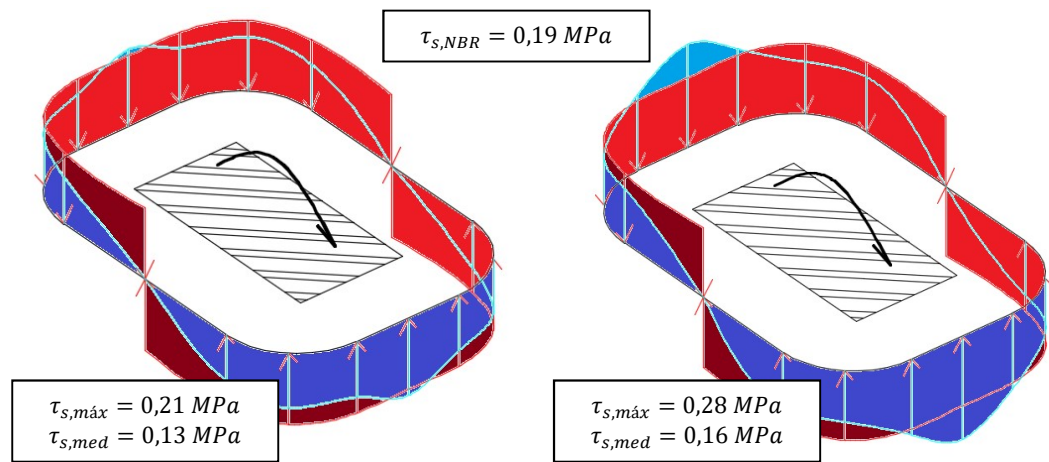


Figura 6.15 – Tensões solicitantes no perímetro crítico, malhas de 6x6cm e 50x50cm respectivamente

#### 6.1.6 Pilar com seção retangular modelado com trecho rígido com $h=16cm$ e $M_x=45kN.m$

Este caso apresenta uma análise de pilar similar ao item anterior, agora sujeito a um momento  $M_x$  de 45kN.m em torno do eixo de menor inércia. A altura da laje é de 16cm e a altura útil é de 12cm. As Figuras 6.16 e 6.17 apresentam os esforços cortantes  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  em kN/m para uma malha de 6x6cm e 50x50cm, respectivamente.

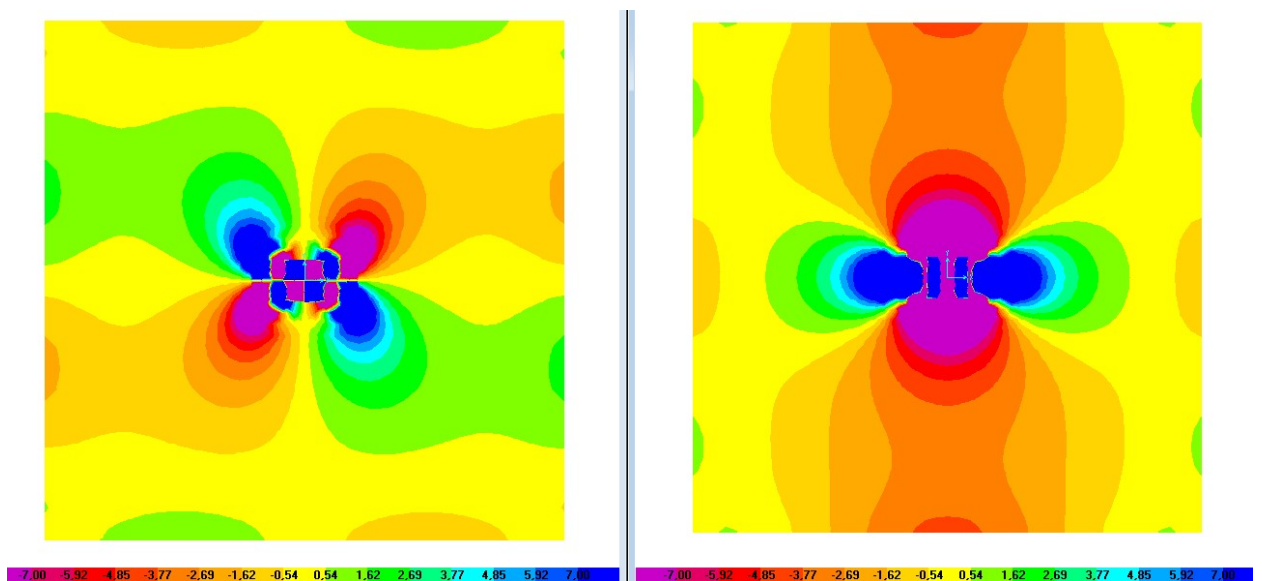


Figura 6.16 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m) e malha 6x6cm

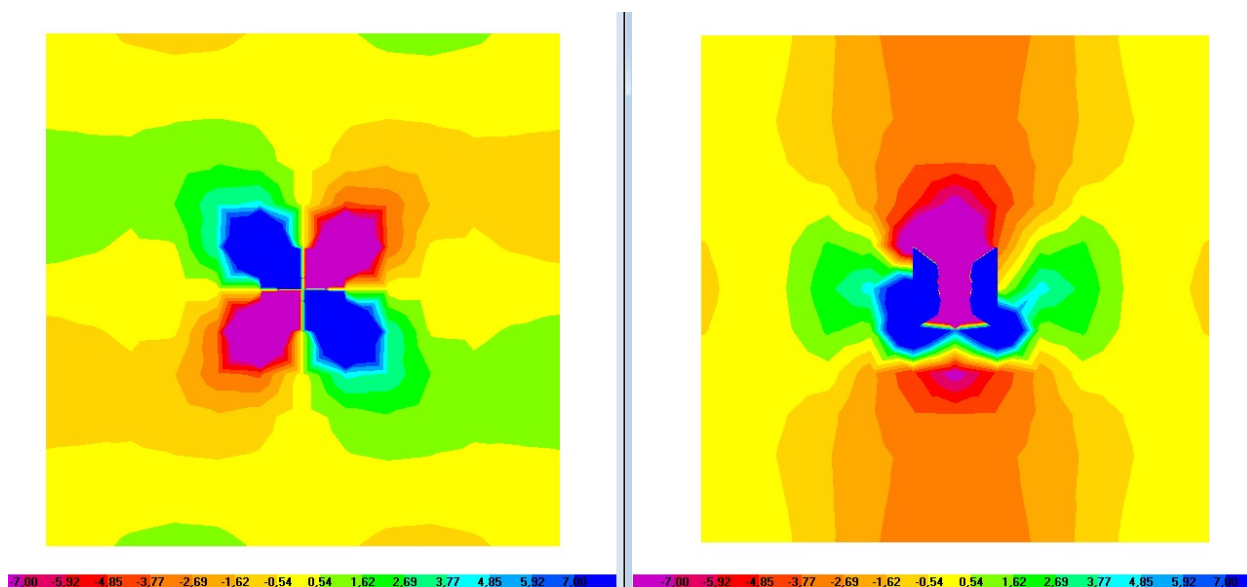


Figura 6.17 –  $V_{xz}$  e  $V_{yz}$  (kN/m) e malha de 50x50cm

Assim como no item anterior, o modelo com malha mais fina (6x6cm) apresenta resultados muito próximos dos fornecidos pela NBR 6118/14 e a favor da segurança quando se consideram as tensões solicitantes máximas. O modelo com malha mais espessa (50x50cm) indica tensões máximas pouco acima das fornecidas pela NBR 6118/14, mas nos pontos nos trechos circulares do perímetro crítico. Neste caso, com pilar com seção retangular e momento desbalanceado no eixo de maior inércia, as tensões de cisalhamento dos modelos numéricos forneceram valores máximos bastante próximos dos obtidos pelas equações de verificação da punção da NBR 6118/14, a favor da segurança, independente da malha utilizada. No entanto os pontos 5 e 13 do perímetro crítico fornece valores bastante diferentes nas duas malhas. As tensões médias em ambos modelos resultaram abaixo da obtida pela NBR 6118/14.

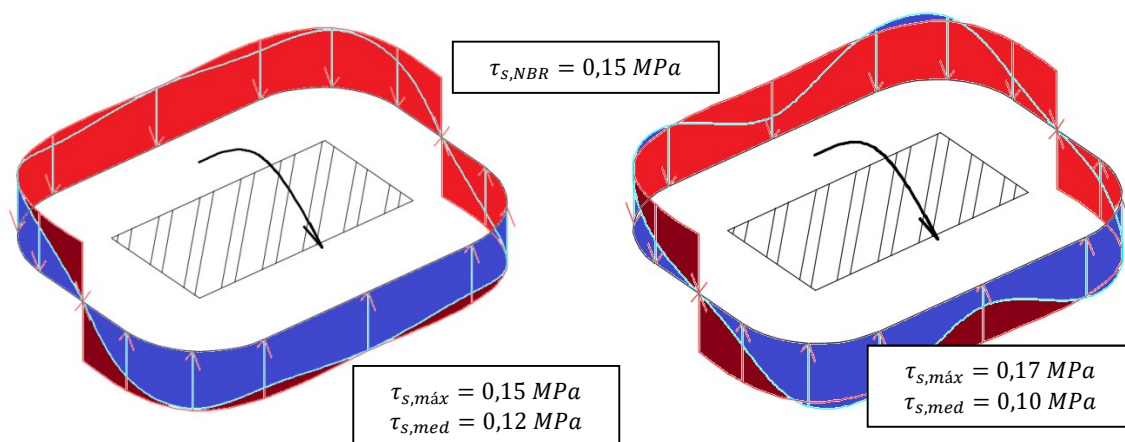


Figura 6.18 – Tensões solicitantes no perímetro crítico com malhas de 6x6cm e 50x50cm respectivamente

## 6.2 Tensões de cisalhamento segundo diferentes modelagens de pilar e malhas grossas

Neste item são analisadas as variabilidades das tensões solicitantes de cisalhamento no perímetro crítico a 2d da face do pilar com diferentes modelagens dos pilares usando malhas de 50x50cm e 25x25cm. Para cada modelo são calculadas as tensões obtidas no perímetro crítico do modelo de casca pelo MEF, onde a tensão solicitante é obtida em função de sua altura útil  $d$ . Como são conhecidos os esforços solicitantes  $N$ ,  $M_y$  e  $M_x$ , pode-se obter a tensão de cisalhamento fornecida pela NBR 6118/14, definida como a tensão real ou de referência  $R$ . Assim definem-se as variáveis aleatórias de incertezas de modelo EMU em função das tensões médias ( $\lambda_{\tau A}$ ) e das tensões máximas ( $\lambda_{\tau B}$ ) de cisalhamento para todas as modelagens de pilar com as malhas grossas.

O objetivo desta análise é explorar o que se julga ser a forma de verificação da punção usual de projeto quando se usam as tensões solicitantes de cisalhamento no perímetro crítico de um modelo numérico com as equações de tensões resistentes de punção da NBR 6118/14.

### 6.2.1 Tensões médias

Neste item são consideradas as tensões médias de cada modelo considerando malhas de 50x50cm e 25x25cm. Define-se a variável aleatória EMU  $\lambda_{\tau A}$ , ajustando os valores das tensões solicitantes médias de cisalhamento, obtidas por todas as modelagens em função das respectivas tensões solicitantes fornecidas pela NBR 6118/14 (conforme item 4.1.2) a uma curva de distribuição de probabilidades lognormal, que pode ser observada na Figura 6.19, assim como sua média e o desvio padrão.

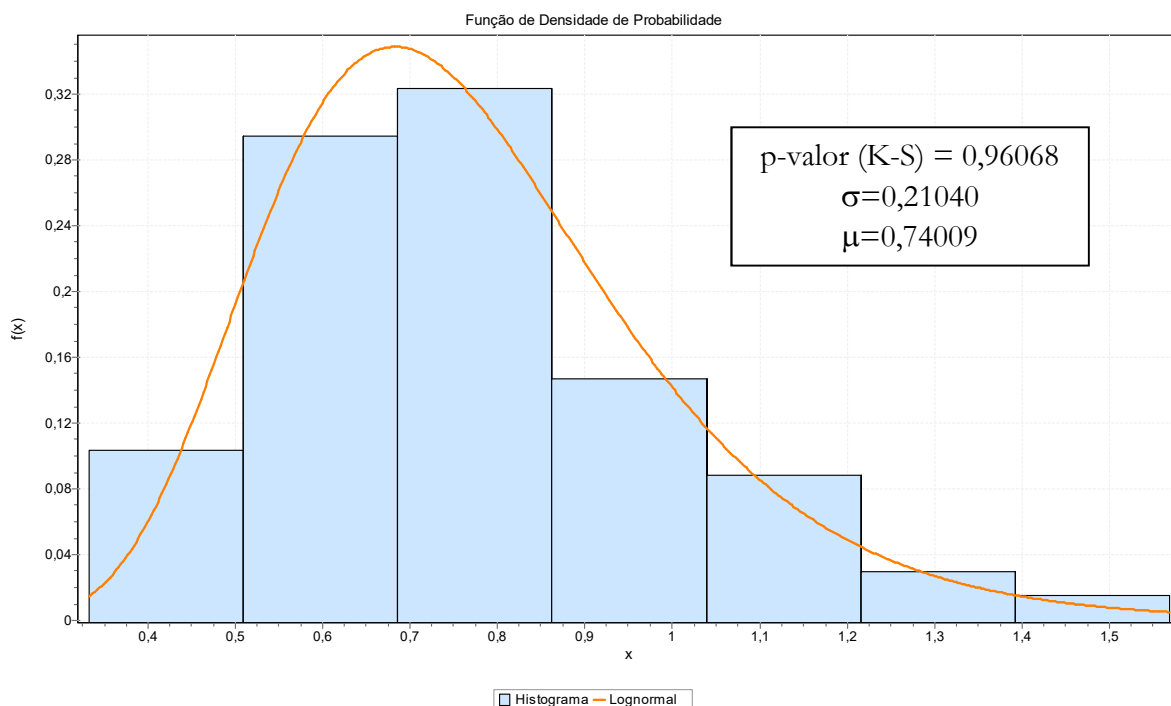


Figura 6.19 – Histograma de distribuição de probabilidades para  $\lambda_{\tau A}$ .

O cálculo probabilístico é feito usando o caso de estudo com o pilar na posição A1-R, já

apresentado no item 5.1. O Quadro 6.1 mostra os valores da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade para as equações de estado limite  $g(x)$ ,  $g'_1(x)$  e  $g'_{\tau A}(x)$ .

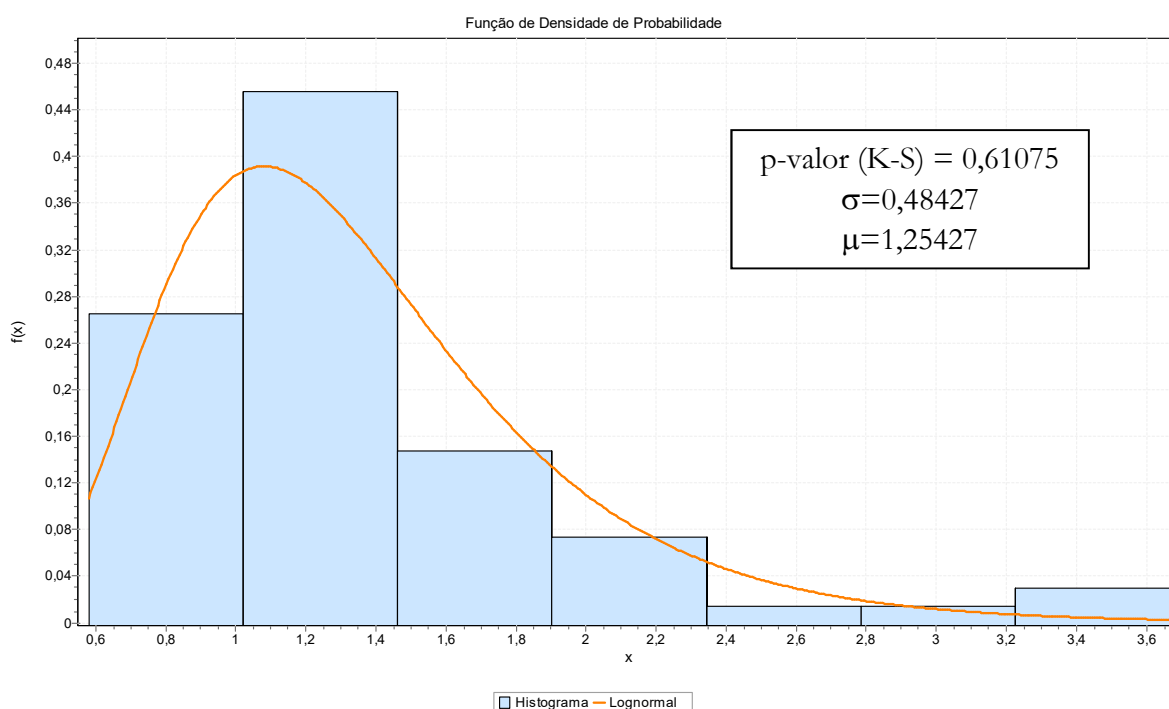
**Quadro 6.1 – Probabilidades de falha e índice de confiabilidade para o caso do pilar A1-R**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,46	4,15e-06
$g'_1(x)$	$\theta_1$	4,00	3,16e-05
$g'_A(x)$	$\lambda_{\tau A}$	1,41	7,90e-02

Comparando-se o resultado da análise de confiabilidade com o obtido com a incerteza de modelo do JCSS (2001), observa-se uma probabilidade de falha muito alta, inviabilizando esse modo de análise da maneira apresentada.

## 6.2.2 Tensões máximas

Neste item são consideradas as tensões máximas obtidas por todos os modelos com malhas de 50x50cm e 25x25cm. Define-se a variável aleatória EMU  $\lambda_{\tau B}$ , ajustando os valores das tensões solicitantes máximas de cisalhamento, obtidas por todas as modelagens em função das respectivas tensões solicitantes fornecidas pela NBR 6118/14 (conforme item 4.1.2) a uma curva de distribuição de probabilidades lognormal, que pode ser visualizada na Figura 6.20.



**Figura 6.20 – Histograma de distribuição de probabilidades para  $\lambda_{\tau B}$ .**

O cálculo probabilístico é feito usando o caso de estudo com o pilar na posição A1-R. O Quadro 6.2 apresenta os valores da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade para as



equações de estado limite  $g(x)$ ,  $g'_1(x)$  e  $g'_{\tau B}(x)$ .

**Quadro 6.2 – Probabilidades de falha e índice de confiabilidade para o caso do pilar A1-R**

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,46	4,15e-06
$g'_1(x)$	$\Theta_1$	4,00	3,16e-05
$g'_B(x)$	$\lambda_{\tau B}$	2,35	9,46e-03





É possível observar que a média das tensões solicitantes máximas de cisalhamento obtidas pelos modelos numéricos apresenta uma média maior que um, portanto conservadora em relação ao valor fornecido pela NBR 6118/14. No entanto, devido à grande variabilidade do EMU o valor da probabilidade de falha resultou muito alto, inviabilizando também esse modo de análise da maneira aqui apresentada. Pode-se enfatizar essa conclusão comparando-se o resultado da análise de confiabilidade com o obtido com as incertezas de modelo fornecidas pelo JCSS (2001).

### 6.3 Modelagens de pilar e refinamentos de malha que melhor se ajustam aos valores fornecidos pela NBR 6118/14

Neste item são analisadas as modelagens de pilar e o refinamento de malha que fornecem as tensões de cisalhamento que melhor se ajustam às fornecidas pela NBR 6118/14. A adequabilidade do modelo e da malha são analisados através do impacto na segurança da variável aleatória incerteza de modelo EMU, analisando o índice de confiabilidade  $\beta$  obtido pelo método SORM.

As incertezas de modelo EMU são definidas para as seis modelagens de pilar e para cada refinamento de malha isoladamente, em função das tensões médias e das tensões máximas obtidas para cada modelagem e malha. Estas variáveis aleatórias são ajustadas a uma curva de distribuição de probabilidades, com uma média e um desvio padrão. Assim são selecionados modelagens e refinamentos de malha que apresentam o EMU com média mais próxima de 1 e desvio padrão mais próximo de 0 para a análise de confiabilidade. As Figuras 6.21 e 6.22 apresentam as dispersões dos valores de  $\lambda_{\tau i}$  para tensões médias e máximas de cisalhamento no perímetro crítico, respectivamente. O Quadro 6.3 apresenta a legenda para a identificação dos símbolos representando o refinamento das malhas, usados nas Figuras 6.21 e 6.22.

**Quadro 6.3 – Legenda para as Figuras 6.21 e 6.22**

Símbolo				
Malha	50x50cm	25x25cm	12x12cm	6x6cm

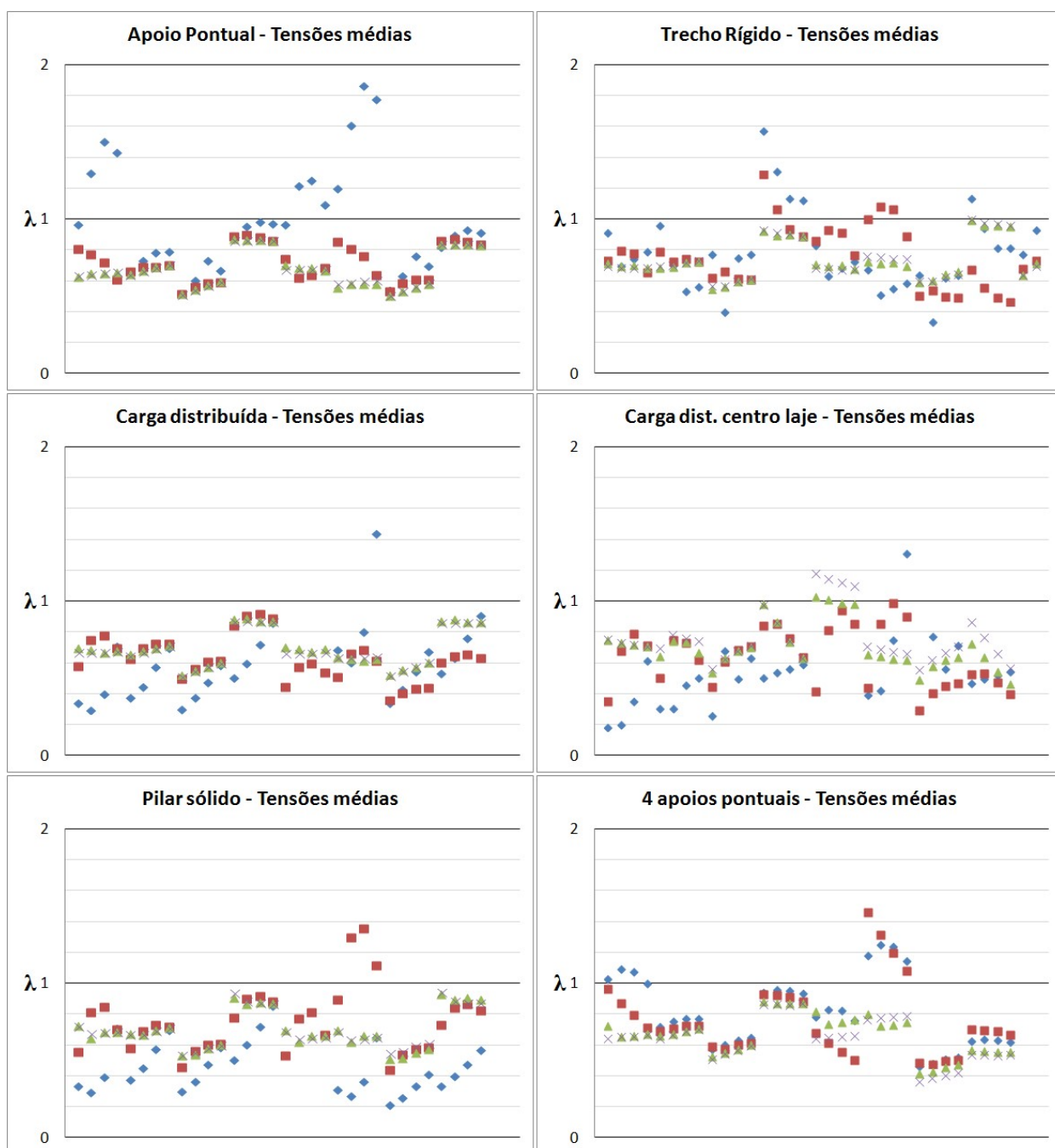


Figura 6.21 – Diagramas de dispersão dos valores de  $\lambda_r$  para tensões médias.

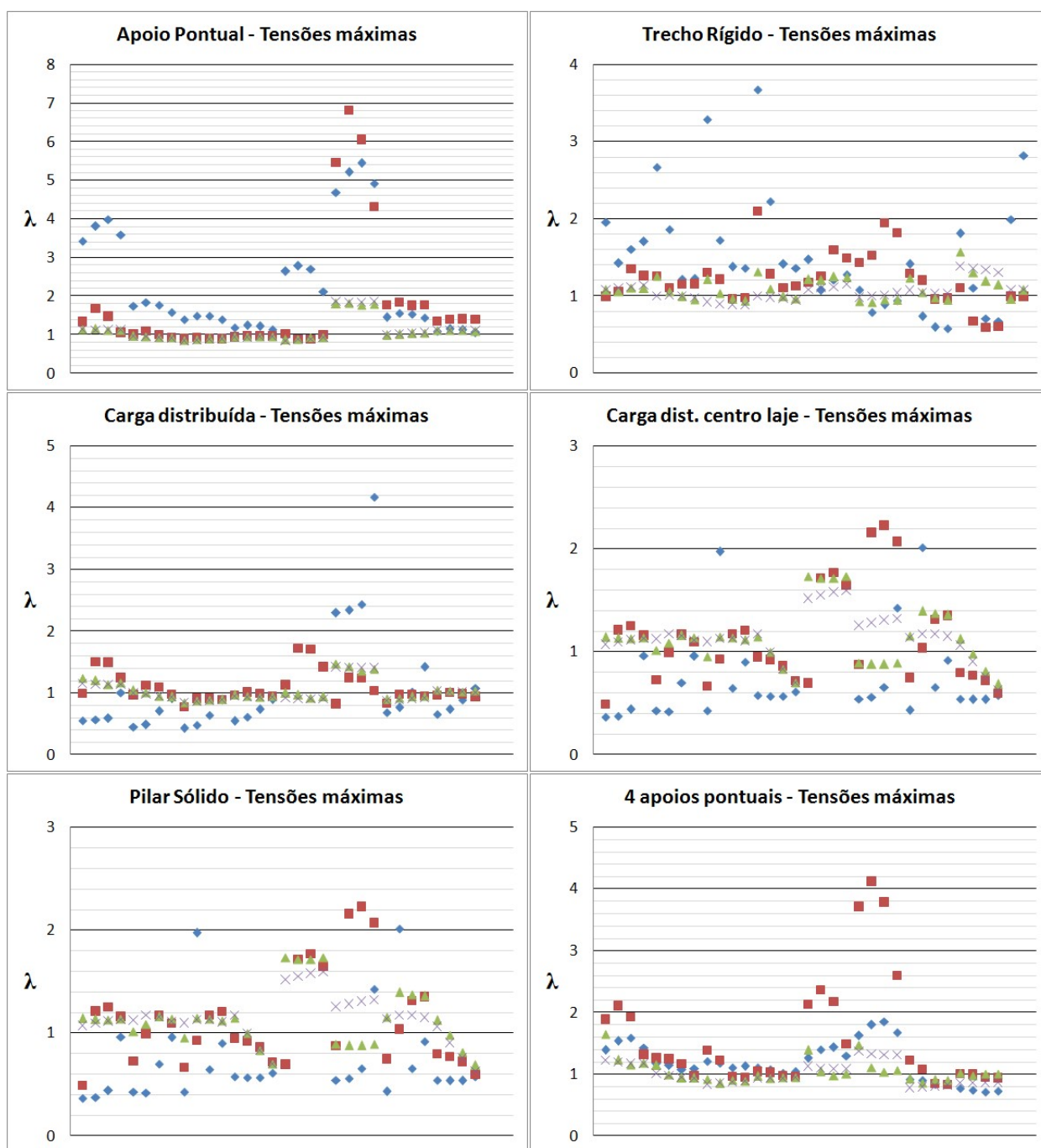


Figura 6.22 – Diagramas de dispersão dos valores de  $\lambda_{\tau}$  para tensões máximas.

Pode-se observar a tendência em se obterem tensões menores que as fornecidas pela NBR 6118/14 quando se usam as tensões de cisalhamento médias no perímetro crítico. Já quando se usam as tensões máximas de cisalhamento no perímetro crítico, a média parece estar mais próxima ou acima de 1. Fica claro nas duas figuras acima que malhas mais espaçadas fornecem valores mais dispersos, ou seja, resultam em variabilidades maiores dos modelos.

Apenas observando as figuras acima não é possível visualizar se um modelo se ajusta melhor aos resultados fornecidos pela NBR 6118/14. Para isso são apontados os valores das médias, desvios padrão e funções de distribuições de probabilidade para  $\lambda_{\tau i}$  em função da malha e

do modelo. O Quadro 6.4 considera as tensões de cisalhamento médias no perímetro crítico e o Quadro 6.5 as máximas.

**Quadro 6.4 – Distribuições de probabilidade de  $\lambda_{ti}$  para as tensões médias**

Tensões	Modelo	Malha	Média	Desvio Padrão	Distribuição	p-valor
Tensões Médias	Apoio Pontual	50x50cm	0,9373	0,3094	Lognormal	0,648
		25x25cm	0,7196	0,1192	Normal	0,667
		12x12cm	0,6642	0,1121	Lognormal	0,372
		6x6cm	0,6629	0,1093	Lognormal	0,275
	Trecho Rígido	50x50cm	0,7442	0,2312	Lognormal	0,904
		25x25cm	0,7367	0,1879	Lognormal	0,985
		12x12cm	0,6788	0,0968	Gumbel	0,078
		6x6cm	0,6768	0,0993	Gumbel	0,511
	Carga Distribuída Face do Pilar	50x50cm	0,5536	0,1995	Lognormal	0,995
		25x25cm	0,6347	0,1421	Normal	0,977
		12x12cm	0,6851	0,1117	Lognormal	0,270
		6x6cm	0,6349	0,0895	Gumbel	0,267
	Carga Distribuída Centro da Laje	50x50cm	0,5157	0,2214	Normal	0,698
		25x25cm	0,6362	0,1922	Normal	0,719
		12x12cm	0,6998	0,1384	Lognormal	0,252
		6x6cm	0,6847	0,1308	Gumbel	0,263
	Pilar como Modelo Sólido	50x50cm	0,4311	0,1514	Lognormal	0,883
		25x25cm	0,7326	0,1930	Lognormal	0,878
		12x12cm	0,6882	0,1226	Lognormal	0,394
		6x6cm	0,6470	0,0955	Gumbel	0,367
	4 Apoios Pontuais	50x50cm	0,7797	0,2209	Lognormal	0,708
		25x25cm	0,7300	0,2091	Lognormal	0,316
		12x12cm	0,6647	0,1334	Normal	0,926
		6x6cm	0,6404	0,1409	Normal	0,541

Quadro 6.5 – Distribuições de probabilidade de  $\lambda_{ti}$  para as tensões máximas

Tensões	Modelo	Malha	Média	Desvio Padrão	Distribuição	p-valor
Tensões Máximas	Apoio Pontual	50x50cm	1,9741	1,0259	Lognormal	0,149
		25x25cm	1,4050	0,8085	Lognormal	0,123
		12x12cm	0,9599	0,2212	Gumbel	0,058
		6x6cm	0,9541	0,2375	Gumbel	0,028
	Trecho Rígido	50x50cm	1,3555	0,6208	Lognormal	0,979
		25x25cm	1,2043	0,3300	Normal	0,384
		12x12cm	1,0924	0,1479	Normal	0,562
		6x6cm	1,0545	0,1174	Lognormal	0,562
	Carga Distribuída Face do Pilar	50x50cm	0,8515	0,4742	Lognormal	0,357
		25x25cm	1,0580	0,2123	Lognormal	0,072
		12x12cm	1,0249	0,1533	Lognormal	0,189
		6x6cm	1,0019	0,1522	Lognormal	0,085
	Carga Distribuída Centro da Laje	50x50cm	0,6456	0,2836	Lognormal	0,182
		25x25cm	1,0429	0,3957	Lognormal	0,979
		12x12cm	1,0996	0,2627	Lognormal	0,138
		6x6cm	1,139	0,2271	Normal	0,163
	Pilar como Modelo Sólido	50x50cm	0,6259	0,1597	Lognormal	0,432
		25x25cm	1,1699	0,24773	Lognormal	0,678
		12x12cm	1,0570	0,1320	Lognormal	0,481
		6x6cm	1,0294	0,1090	Lognormal	0,242
	4 Apoios Pontuais	50x50cm	1,1482	0,3013	Lognormal	0,979
		25x25cm	1,4038	0,6385	Lognormal	0,176
		12x12cm	1,0229	0,1552	Lognormal	0,175
		6x6cm	0,9889	0,1649	Lognormal	0,294

Analisando as médias e os desvios-padrão das distribuições de probabilidade dos Quadros 6.4 e 6.5, observa-se que os modelos que melhor se aproximam da equação da NBR 6118/2014, são os que consideram as tensões máximas no perímetro crítico. Os testes de hipótese foram considerados com uma significância de 5%. Foram selecionados quatro modelos para verificação da variabilidade no cálculo da confiabilidade, relacionados no Quadro 6.6.

Quadro 6.6 – Distribuições de probabilidade de  $\lambda_{ti}$  para as tensões máximas

Tensões	Id	Modelo	Malha	Média	Desvio Padrão	Distribuição	p-valor
Tensões Máximas	1	Trecho Rígido	6x6cm	1,0545	0,1174	Lognormal	0,562
	3	Carga Distribuída Face do Pilar	6x6cm	1,0019	0,1522	Lognormal	0,085
	5	Pilar como Modelo Sólido	6x6cm	1,0294	0,1090	Lognormal	0,242
	6	4 Apoios Pontuais	6x6cm	0,9889	0,1649	Lognormal	0,294

O cálculo probabilístico de falha é apresentado na Figura 6.23 e no Quadro 6.7.

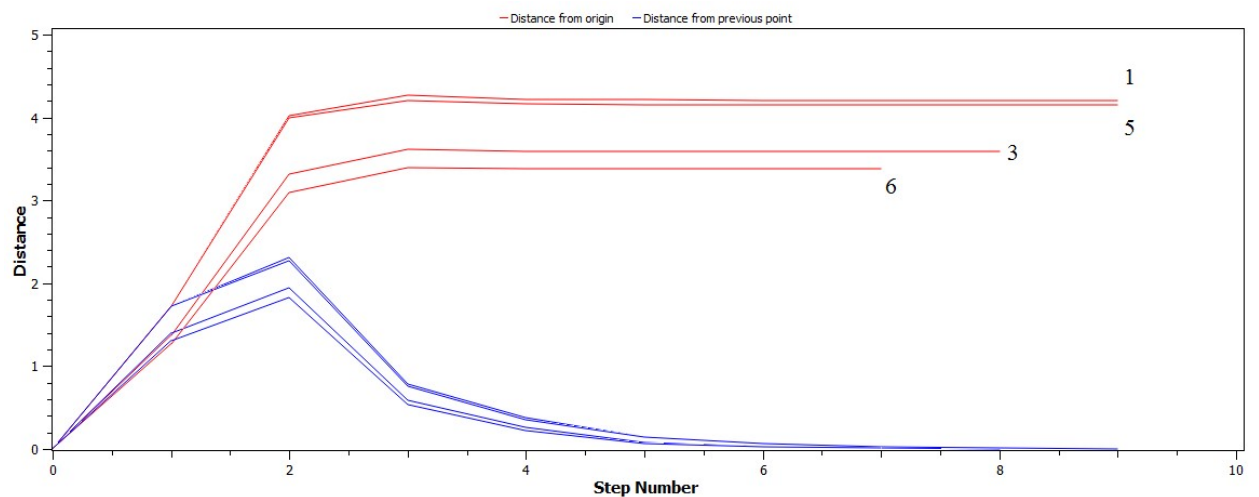


Figura 6.23 – Convergência de  $\beta$  para  $g(x)$  para o pilar B2-R.

Quadro 6.7 – Dados estatísticos para cálculo de confiabilidade para o pilar A1-R

Função	Incerteza de modelo	$\beta$	$p_f$
$g(x)$	-	4,46	4,15e-06
$g'_1(x)$	$\Theta_1$	4,00	3,16e-05
$g'_{\tau 1}(x)$	$\lambda_{\tau 1}$	4,14	1,77e-05
$g'_{\tau 3}(x)$	$\lambda_{\tau 3}$	3,52	2,17e-04
$g'_{\tau 5}(x)$	$\lambda_{\tau 5}$	4,08	2,26e-05
$g'_{\tau 6}(x)$	$\lambda_{\tau 6}$	3,32	4,55e-04

É possível observar que os modelos e malhas que melhor se adequam aos valores de tensões fornecidos pela NBR 6118/14 são o de pilar modelado com trecho rígido (Modelo 1) e pilar modelado como elemento sólido (Modelo 5), ambos com malha 6x6cm e considerando a tensão de cisalhamento máxima obtida no perímetro crítico. Os modelos considerando carga distribuída na área do pilar e quatro apoios pontuais, apesar de terem apresentado uma média próxima de 1, devido à grande variabilidade dos EMUs, apresentaram valor da probabilidade de falha mais alto que o obtido com a incerteza de modelo do JCSS (2001).

## **6.4 Conclusões da abordagem sobre as tensões solicitantes no perímetro de controle**

Neste capítulo se estudou a relação das tensões de cisalhamento obtidas em modelos numéricos com as tensões solicitantes de punção fornecidas pela equação [eq. 2.4] da NBR 6119/14. Na primeira etapa, compararam-se as distribuições das tensões de cisalhamento de alguns modelos numéricos com a distribuição idealizada pela NBR 6118 quando se tem apenas momentos desbalanceados na laje. Observou-se que o refinamento da malha dos modelos numérico melhora bastante a qualidade dos resultados, uniformizando-os e os aproximando dos valores fornecidos pela NBR 6118/14 quando se considera o valor apenas da tensão máxima em um ponto, em comparação aos resultados obtidos por malhas mais grossas. Quanto à distribuição das tensões no perímetro crítico, o comportamento nos modelos numéricos foi um pouco diferente do idealizado pela NBR 6118/14. A distribuição não foi uniforme em nenhum dos casos, e a suposição de uma tensão média constante obtida do modelo numérico não representa bem os resultados fornecidos pela norma brasileira. Os modelos com malha fina submetidos a um momento desbalanceado em apenas um eixo forneceram tensões máximas de cisalhamento bastante próximas e um pouco a favor da segurança em relação à tensão da norma brasileira, enquanto que no modelo numérico com momentos desbalanceados nos dois eixos, a tensão máxima obtida do modelo numérico com malha fina foi inferior a fornecida pela NBR.

Na segunda etapa, estudou-se a variabilidade dos modelos quando não há restrição quanto à modelagem do pilar e quanto ao refinamento da malha, supondo que seriam usadas as tensões (médias ou máximas) de cisalhamento do modelo numérico para verificação da punção usando as equações fornecidas pela NBR 6118/14. Verificou-se que as variabilidade são muito elevadas, tanto quando se consideram as tensões máximas quanto as tensões médias. A incerteza de modelo, quando se consideram as tensões médias, apresentou média inferior a um, ou seja, com tendência contra a segurança. Apesar da incerteza de modelo, quando se consideram as tensões máximas, resultar em média superior a um - com tendência a favor da segurança - a alta variabilidade em uma distribuição de probabilidades lognormal, fizeram com que a probabilidade de falha fosse muito elevada em comparação ao erro de modelo do JCSS (2001).

A terceira etapa teve como foco estimar quais modelagens de pilar e refinamentos de malha em um modelo numérico seriam mais adequados para usar em conjunto às equações fornecidas pela norma brasileira, quando se usam as tensões solicitantes de cisalhamento no perímetro crítico a 2d da face do pilar. Para tanto foram elaborados 778 modelos, com 1556 resultados de tensões, onde foi possível estudar as variabilidades de cada modelagem de pilar e refinamento de malha. Os

modelos onde se considerou a tensão de cisalhamento máxima obtida no perímetro crítico e uma malha mais fina (6x6cm) se adequaram melhor aos valores de tensões fornecidos pela NBR 6118/14. As modelagens de pilar considerando trecho rígido e elementos sólidos forneceram probabilidades de falha inferiores à obtidas pela incerteza de modelo do JCSS (2001), o que indica um melhor ajuste destas duas modelagens às equações da NBR 6118/14 em relação às demais modelagens estudadas.



## 7 *Considerações finais*

Muitas vezes, a verificação da punção é feita sem uma análise adequada do tipo de modelo usado para a verificação da flexão da laje. Uma vez que a normalização usa esforços normais e momentos fletores que atuam no pilar, e esses esforços são decorrentes da análise estrutural, uma visão integrada é essencial para a verificação da punção. Neste trabalho, estudaram-se os esforços e tensões solicitantes segundo diferentes modelagens e diferentes métodos de análise no regime elástico linear, com uma visão integrada de flexão e punção. O estudo focou-se em pilares internos, usando as prescrições normativas para verificação da punção da NBR 6118/14, para algumas configurações de lajes lisas assimétricas.

Para atingir os objetivos desta pesquisa, fez-se uma revisão dos métodos de análise de lajes lisas mais difundidos, incluindo diferentes métodos dos pórticos equivalentes. Para os métodos numéricos, exploraram-se diversas maneiras presentes na literatura de modelar o pilar, as quais propõem modelos alternativos para solucionar o problema da singularidade que ocorre ao representar o pilar como apoio pontual diretamente na laje. Das várias modelagens presentes na literatura, são selecionadas sete, por estarem presentes em um maior número de trabalhos e conservarem características particulares em relação às demais. Foi feita uma revisão de pesquisas que tratam da punção, de modo a explicitar o alheamento destas em relação à visão integrada de flexão e punção. São expostas as prescrições normativas para verificação da punção da norma brasileira, incluindo alguns de seus fundamentos e origens.

O trabalho foi dividido em duas abordagens: a primeira estuda os esforços solicitantes (N e M) segundo diferentes métodos de análise e modelagens de pilar; a segunda estuda as tensões solicitantes de cisalhamento no perímetro crítico  $c'$  obtidas de um método numérico por diferentes modelagens de pilar. Nas duas abordagens são estudadas as variabilidades dos esforços ou das tensões solicitantes, analisando o impacto na segurança através de estudos de confiabilidade. Para tanto, foi elaborada uma equação de estado limite último de punção oriunda das equações da norma brasileira.

Para definir os casos de estudo que foram utilizados na primeira abordagem, fez-se uma análise de sensibilidade da influência da proporção dos lados do pilar interno na tensão solicitante de punção. Criou-se o coeficiente  $\alpha$ , que fornece a participação das tensões provocadas pelos momentos desbalanceados na tensão solicitante total de punção obtida pela fórmula da norma brasileira. Verificou-se que para pilares submetidos a momentos em apenas um dos eixos, um maior momento de inércia em torno do eixo onde atua o momento confere uma maior participação dos momentos desbalanceados (um maior valor de  $\alpha$ ). Já para pilares submetidos a momentos nos dois eixos, quanto mais próxima da unidade for a relação entre os lados, ou seja, quanto mais próxima de uma forma quadrada for a seção transversal, maior é o valor de  $\alpha$ .

Na primeira abordagem foram analisados as forças de reação e os momentos transferidos ao pilar para 16 modelos em cada um dos quatro casos de estudo. As forças de reação do pilar não apresentaram grandes variabilidades nas análises, enquanto que os momentos desbalanceados

revelaram diferenças significativas entre os modelos, nos quatro casos de estudo. Nos modelos onde os pilares foram modelados como apoios pontuais, os resultados de momentos desbalanceados foram os mais distantes dos demais, corroborando com os resultados da literatura. Os esforços dos métodos dos pórticos equivalentes também se distanciaram dos fornecidos pelos métodos numéricos. Através da equação  $h_{\delta}$ , foi possível demonstrar graficamente a maior dispersão dos momentos desbalanceados em relação ao esforços normal. Também se observou que quando há assimetria nos dois eixos, a variabilidade dos momentos desbalanceados no eixo com maior inércia é sensivelmente maior em relação aos momentos no eixo de menor inércia. As variabilidades observadas em cada caso de estudo são adaptadas na forma de uma variável aleatória de incerteza de modelo. Percebe-se que, utilizando os esforços obtidos do modelo 1 como valores de referência, a variável  $\lambda_{\delta 1}$  frequentemente apresentou média inferior a 1, indicando uma tendência contra a segurança. O impacto das variabilidades são analisadas através da variável aleatória erro de modelo em estudos de confiabilidade. Nos quatro casos de estudo, observou-se que existe uma relação entre a probabilidade de falha e o coeficiente  $\alpha$ , ou seja, a participação dos momentos desbalanceados na tensão total de punção determina o impacto das suas variabilidades na segurança da punção. Por falta de dados experimentais, os índices de confiabilidade obtidos considerando o erro de modelo do JCSS (2001) são adotados como valores de referência. Com isso, o caso de estudo A1-R, onde o valor de  $\alpha$  é o mais baixo dos quatro casos de estudo, apresenta um índice de confiabilidade - quando se consideram os modelos com os métodos dos pórticos equivalentes - acima do obtido com a incerteza de modelo do JCSS (2001), indicando uma adequabilidade em se usar este método para obter os esforços N e M para a verificação da punção. Em nenhum dos outros 3 casos de estudo foi possível considerar os esforços obtidos dos métodos dos pórticos equivalentes para verificar a punção. Ainda, em nenhum dos casos de estudo, os modelos onde se considerou o pilar modelado como apoio pontual foi adequado para usar os esforços solicitantes. Um resultado a ser destacado no estudo de confiabilidade é que, quando o valor de  $\alpha$  cresce, os índices de confiabilidade obtidos dos erros de modelo - mesmo quando se excluem pilares como apoio pontual e métodos dos pórticos equivalentes - ainda resultam acima dos obtidos com o erro de modelo do JCSS (2001). Isso indicaria que situações onde a participação dos momentos desbalanceados começa a ser predominantes na análise da punção, deveria ter análises limitadas a métodos e/ou modelagens específicas que melhor representem os resultados fornecidos pelas equações da norma brasileira.

Na segunda abordagem foram analisadas as tensões de cisalhamento obtidas dos esforços cortantes no perímetro crítico  $c'$  por análises no regime elástico linear usando o método dos elementos finitos. Foram consideradas seis modelagens de pilar e quatro refinamentos de malha em cada análise, as quais foram feitas variando a espessura da laje, os esforços aplicados e a relação entre lados do pilar, totalizando 778 modelos. A segunda abordagem é dividida em três etapas. A primeira etapa analisa qualitativamente a distribuição das tensões de cisalhamento no perímetro  $c'$  em relação à distribuição de tensões idealizada pela norma brasileira. Observa-se que o refinamento da malha tem grande influência nos valores de tensões máximas observadas nos modelos numéricos. As tensões solicitantes máximas tendem a ter valores próximos dos obtidos pela NBR 6118/14, a favor da segurança, com exceção do caso de pilar com assimetria nos dois eixos, onde a tensão do modelo numérico foi inferior à obtida pela norma brasileira. Na segunda etapa foi analisado o impacto na

segurança em se fazer a verificação da punção usando os esforços cortantes dos modelos numéricos sem haver preocupação com o refinamento da malha ou a modelagem do pilar. Observou-se que tanto para tensões médias quanto tensões máximas, os resultados apresentam uma variabilidade muito grande, resultando em índices de confiabilidade baixos. A terceira etapa teve com objetivo selecionar modelagens de pilar e refinamentos de malha que fornecessem tensões de cisalhamento no perímetro crítico  $c'$  que melhor se ajustam às tensões fornecidas pela NBR 6118/14. Os resultados indicam que a melhor maneira de relacionar tensões do modelo e da norma seria utilizando as tensões máximas. Os estudos probabilísticos considerando os erros de modelo obtidos com pilar modelado com trecho rígido e com pilar modelado como elementos sólidos apresentaram probabilidades de falha inferiores às obtidas com o erro de modelo do JCSS (2001), usado como referência. Esses resultados mostram que algumas modelagens fornecem valores de esforços cortantes no perímetro crítico, obtidos de um modelo numérico em regime elástico linear, bastante próximos dos obtidos pelas equações da NBR 6118/14. Isso poderia indicar uma possibilidade em se usar as tensões obtidas de um modelo numérico para verificação da punção pela norma brasileira, desde que se definam modelagens adequadas.

O presente estudo teve um enfoque voltado para projeto, onde se observou que as variabilidades ocasionadas por diferentes modelagens podem influenciar na verificações da punção, assim como os esforços cortantes de modelos numéricos podem fornecer valores por vezes próximos dos fornecidos pela norma brasileira, dependendo principalmente da modelagem e do refinamento da malha. O prosseguimento e ampliação do tema abordado pode levar a soluções para os problemas levantados e ajuste das possibilidades apresentadas.

## 7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Por fim, sugere-se realizar os estudos relacionados a seguir:

- a) Comparar os modelos estudados nessa tese com exemplos experimentais;
- b) Ajustar modelagens de pilar que representem os ensaios de punção;
- c) Estudar um modelo integrado de elementos finitos e cálculo probabilístico para simulação de uma quantidade maior de parâmetros, com foco na variabilidade de esforços;
- d) Estudar um modelo integrado de elementos finitos e cálculo de probabilístico para simulação de uma quantidade maior de parâmetros, com foco no comportamento dos esforços cortantes no perímetro crítico  $c'$ ;
- e) Estudos semelhantes, considerando pilares de borda e de canto.

## 8 Referências

- ALBUQUERQUE, N. G. B.. **Comportamento das ligações de lajes lisas de concreto armado com pilares de borda sujeitas a excentricidades interna e externas.** Tese de doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, 2014.
- ALEXANDER, S.D.B.; SIMMONDS, S.H. **Punching Shear Tests of Concrete Slab-Column Joints Containing Fiber Reinforcement.** ACI Structural Journal, v.89, n.4, July/August. 1992.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. (ACI 318-08). - **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary.** Michigan: Farmington Hills, 2002.
- ANG, A. H-S; TANG, W. H.. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design.** Vol. 1 e 2 – Decision, Risk, and Reliability. New York: John Wiley & Sons, 1975.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR12655: Concreto de cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação - Procedimento.** Rio de Janeiro, 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118: Projeto de Estruturas de Concreto Armado.** Rio de Janeiro, 2014.
- BATOZ J.-L. AND TAHAR M. B., **Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 18, p.1655-1677, 1982.
- BECK, A. T.. **Curso de Confiabilidade Estrutural.** Notas de aula. Departamento de Engenharia de Estruturas. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.
- BELK, A.. **Dimensionamento de lajes à punção.** Biblioteca digital do site [www.tqs.com.br](http://www.tqs.com.br), 2009.
- BØLVIKEN, I. S.. **Models for Punching Shear Capacity in Concrete Slabs.** Dissertação de mestrado. Department of Structural Engineering. Norwegian University of Science and Technology. Trondheim, Noruega, 2013.
- BRITISH STANDARD. **BS 8110:1997: Structural use of concrete.** Sheffield, 2002.
- BUENO, L. O. S.. **Cálculo e dimensionamento de lajes e comparação entre as ferramentas disponíveis.** Trabalho de conclusão de curso em Engenharia Civil. Universidades Anhembi Morumbi, São Paulo, 2008.
- BULLETT, W. **Uncertainty in structural engineering.** Practice Periodical On Structural Design And Construction (ASCE); v13: p.24–30, 2008.
- CAPRANI, C.. **Punching Shear. 3rd Architecture.** Disponível em: <<http://www.colincaprani.com/files/notes/Punching%20shear.pdf>> Acesso em: maio de 2009
- CARVALHO, R.C.. **Análise não-linear de pavimentos de edificios de concreto através de analogia de grelha.** Tese de doutorado. Universidade de São Paulo. São Carlos, 1994.
- CARVALHO, R.C., PINHEIRO, L.M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado.** São Paulo: PINI, 2009. v.2.
- CARVALHO, A.L., **Resistência ao Puncionamento de Lajes Cogumelo Protendidas com Armadura de Cisalhamento – Comparação com Recomendações da NB1,** Anais do 46º Congresso Brasileiro do Concreto, 2004, 12p.
- COELHO, J.A.. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de Grelha.** Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2000.

COELHO, J.A.; LORIGGIO, D.D.. **Modelagem de lajes de concreto armado por Analogia de Grelha – Conceitos iniciais.** Artigos técnicos do site [www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br), 2002. Disponível em: <http://faq.altoqi.com.br/content/245/600/pt-br/modelagem-de-lajes-de-concreto-armado-por-analogia-de-grelha--conceitos-iniciais.html> Acesso em: maio de 2016.

Computers and Structures, Inc. **SAP 2000 – Integrated Software for Structural Analysis and Design.** Versão 14. EUA, 2011.

CORDOVIL, F.A.B.. **Lajes de Concreto Armado – Punção.** Florianópolis: Editora da UFSC, 1997. 221p.

CORDOVIL, F. A. B. e FUSCO, P. B. **Ensaio de placas de concreto armado – Punção excêntrica.** In: XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tucumán 1995, p. 141-151.

CORDOVIL, F. A. B. e FUSCO, P. B. **Método de Ensaio de Punção Excêntrica em Placas de Concreto.** In: XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tucumán 1995, p. 153-163.

ELGABRY, A.A., GHALI, A.. **Moment transfer by shear in slab-column connections.** ACI Journal, v.93, n.2, p.187-196. Mar, 1996.

ELLINGWOOD, B.; GALAMBOS, T. V.. **Probability-Based Criteria for Structural Design.** Structural Safety, Vol. 1, p.15-26, 1982.

EMERICK, A. A. **Projeto e Execução de Lajes Protendidas.** Brasília. Interciência Ltda., 2005.

ENOCHSSON, O.; DUFVENBERG, P.. **Concrete slabs designed with finite element methods: modelling parameters, crack analysis and reinforcement design.** Dissertação de Mestrado. Lulea University of Technology, Suécia, 2001.

EUROCODE 2 2004. BS EN 1992-1-1:2004. **Design of concrete structures. Part 1-1: General – Rules and rules for buildings.** Brussels: European Committee for Standardisation.

FARIA, E. L.. **Projeto de lajes planas protendidas via método dos elementos finitos e pórticos equivalentes.** Dissertação de Mestrado. UFMG. Belo Horizonte, 2004.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB) - Bulletin 12, **Technical Report: Punching of Structural Concrete Slabs.** Stuttgart, 2001.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB) - Bulletin 2, **Manual Textbook: Structural Concrete.** Volume 2. Stuttgart, 2000.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB) - **MODEL CODE 2010.** Volume 2. Lausanne, 2010.

FELICIANO, F. M. H.. **Punção em lajes lisas de concreto armado com pilares de borda e excentricidade externa.** Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, 2011.

FIGUEIREDO FILHO, J.R.. **Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução.** São Carlos, 1989, 272p.Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1989.

FRACZEK, J.. **ACI Survey of Concrete Structure Errors.** Concrete International. Vol. 1, No. 12, p. 14-20, 1979.

FRÖDERBERG, M.; THELANDERSSON, S.. **Uncertainty caused variability in preliminary structural design of buildings.** Structural Safety. v. 52, p183–193. Elsevier, 2015.

FUSCO, P.B. **Investigação experimental sobre o cisalhamento em lajes de concreto armado.** Boletim técnico, BT/PEF 8505), EPUSP. São Paulo, 1985.

- GASPARINI, D.A. **Contributions of C. A. P. Turner to Development of Reinforced Concrete Flat Slabs 1905–1909**. Journal of Structural Engineering, Reston, v.128, n. 10, p. 1243-1252, Oct. 2002.
- GERE, J.M.; WEAVER, W.. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1981.
- GHALI, A.; MEGALLY, S. **Design for Punching Shear Strength with ACI 318-95**. ACI Structural Journal, v.96, n.42, p.3439-3461.1999.
- GHALI A.; MEGALLY S. H.. **Design for Punching Shear in concrete: critical review of canadian standard CSA-A23.3-94**, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 23, pp. 444-456, Canada, 1996.
- GOMES, R.B. **Punching resistance of reinforced concrete flat slabs with shear reinforcement**. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London. London, 1991.
- GOMES, H. P.. **Puncionamento em lajes lisas protendidas com pilares de extremidades e momentos desbalanceados nas duas direções**. Tese de doutorado. Universidade de Brasília. Brasília, 2010.
- GRIMALDI, A.; MEDA, A.; RINALDI, Z.. **Experimental behaviour of fibre reinforced bridgedecks subjected to punching shear**. Composites, Part. B. Vol. 45, No. 1, p. 811-820, 2013.
- HALLGREN, M.; BJERKE, M.. **Non-linear finite element analyses of punching shear failure of column footings**. Cement & Concrete Composites V.24, págs 491–496. Elsevier, 2002.
- HAMBLY, E.C. **Bridge deck behavior**. London, Chapman and Hall, 1976.
- HENNRICHS, C.A.. **Estudo sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado**, Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003.
- HILLERBORG, A.; **Strip method of design**; London; William & Sons; 225p, 1975.
- HRABOK, M. M.; HRUDEY, T. M.. **Finite element analysis in design of floor systems**. Journal of Structural Engineering (ASCE). v. 109 (4): p. 909 –925, 1983.
- INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO. **Comentários Técnicos e Exemplos de Aplicação da NB-1. NBR 6118:2003 - Projeto de estruturas de concreto – procedimento**. São Paulo: IBRACON, 2006.
- JCSS. **Probabilistic model code**. Joint Committee on Structural Safety; 2001.
- KANSARA, K.. **Development of Membrane, Plate and Flat Shell Elements in Java**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Virginia Polytechnic Institute & State University. Blacksburg, 2004.
- KINNUNEN, S., NYLANDER, H., **Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement**. Transactions of the Royal Institute of Technology, No. 158, Stockholm, Sweden, 1960, 112 pp.
- KUKORLO, J. B.. **Harbour Cay Condominiums**. Biblioteca digital do site failures.wikispaces.com, 2009.
- LA ROVERE, H.L.. **Notas de Aula “Elementos finitos” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil**. UFSC. Florianópolis, 2001.
- LEE, O. S.; KIM, D. H.. **Reliability of Fatigue Damaged Structure Using FORM, SORM and Fatigue Model**. Proceedings of the World Congress on Engineering 2007 Vol 2. Londres, Reino Unido, 2007.
- LEONHARDT, F.; MÖNIG, E.. **Construções de concreto: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Interciência, v.2. Rio de Janeiro, 1979.
- LIMA, Juliana Soares. **Verificações da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas**. Dissertação de mestrado. EESC-USP: São Carlos, 2001.

LOTTI, R. S.; MACHADO, A. W.; MAZZIEIRO, E. T.; LANDRE JÚNIOR, J.. **Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos**. R Dental Press Ortodon Ortop Facial. Maringá, v. 11, n. 2, p. 35-43, mar./abril 2006.

MAcGREGOR, J.G.. **Reinforced Concrete – Mechanics and Design**. 3.ed. New Jersey:Prentice-Hall Inc.,1997.

MAES, M. A.. **Codification of design load criteria subject to modeling uncertainty**. Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 10, 1991.

MAHSULI, M.; HAUKAAS, T.. **Computer program for multimodel reliability and optimization analisys**. Journal of Computing in Civil Engineering. Vol.7, No.1, p87-98, 2013.

MathWave Technologies. **EasyFit - Distribution Fitting**. Versão 5.6. EUA, 2015.

MELCHERS, R. E.. **Structural reliability theory in the context of structural safety**. Civil Engineering and Environmental Systems. Vol. 24, No. 1, p55–69, 2007.

MELGES, J.L.P. **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental**. São Carlos, 1995, 252 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1995.

MELGES, J.L.P. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido**. São Carlos, 2001, 414 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2001.

MELGES, J.L.; PINHEIRO, L. **Punção em Lajes Lisas: a NBR 6118:2003 e sua Versão Anterior**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 46, 2004, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: Instituto Brasileiro do Concreto – IBRACON, 2004.

MELO, G.S.S.A. **Behaviour of reinforced concrete flat slabs after local failure**. Londres, tese (Doutorado). Polytechnic Of Central London, Londres,1990.

MELO, G.S.S.A. **Proposição de item da norma com referência ao cálculo de armadura contra colapso progressivo em lajes cogumelo**. REIBRAC, 36., Anais. V.2, p.725-734. Porto Alegre, 1994.

MENÉTREY, P.. **Relationships between Flexural and Punching Failure**. ACI Structural Journal. v.95, n.4, p.412-417.1998.

MENÉTREY, P. **Synthesis of punching failure in reinforced concrete**. Cement & Concrete Composites 24, 497-507.2002

MONTGOMERY, D. C.; RUGER, G. C.. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

MURRAY K.A.; CLELAND D.J.; GILBERT S.. **The Development of a non-linear numerical model to simulate the behaviour of reinforced concrete flat slabs in the vicinity of edge columns**. Construction and Building Materials. Vol. 19, n. 9, p. 703-712 Belfast, 2005.

MUSSE, T.H. **Punção em Lajes Cogumelo: Fibras de Aço e Armadura de Cisalhamento**. 2004, 189p. Dissertação (Mestrado)– Escola de Engenharia Civil / Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2004.

MUTTONI, A.. **Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement**. ACI Structural Journal. v.105, n.4, p.440-450.2008.

NETO, A. F. L.. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado com capitéis**. Tese de doutorado. Universidade de Brasília. Brasília, 2012.

NOWAK, A. S, CARR, R. I.. **Sensitivity analysis for structural errors**. Journal of Structural Engineering (New York, NY);111:1734–46, 1985.

NOWAK, A.S.; RAKOCZY, A.M.. **Uncertainties in the building process**. Bulletin Of The Polish Academy Of Sciences. Technical Sciences, Vol. 61, No. 1, 2013.

NOWAK, A. S.; SZERSZEN, M. M.. **Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): part 1 – statistical models for resistance**. ACI Structural Journal. v.100, n.3, p.377-382. 2003.

OLIVEIRA, M. H.. **Punção em lajes lisas com armadura de cisalhamento submetidas a carregamento excêntrico e apoiadas sobre pilares retangulares**. Tese de doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, 2013.

OZBOLTJ.;VOCKE, H.; ELIGEHAUSEN,R..**Punching Failure of Interiour Slab-Column Connections – Influence of Material Properties and Size Effect**. In: Vipulanandan, C.; Gerstle, W.H. (Eds.): Fracture Mechanics for Concrete Materials: Testing and Applications. SP-201. 2001, S. 93-110.

PARK H.G. & CHOI K. K., **Improved Strength Model for Interior Flat Plate-Column Connections Subject to Unbalanced Moment**. Technical Paper. Journal of Structural Engineering. Korea, Michigan, 2006.

PEDROZO, D.G.E.. **Análise Crítica dos Critérios de Projeto de Lajes Protendidas**. Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2008.

PINTO, R.C.A.. **Punção assimétrica de lajes**. Dissertação. COPPE,UFRJ. Rio de Janeiro, 1993.

POLAK, M. A..**Modeling Punching Shear of Reinforced Concrete Slabs Using Layered Finite Elements**," ACI Structural Journal, V. 95, No. 1. 1998

PUEL, A.. **Modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas em Concreto armado – análise integrada laje x pilar**. Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2009.

RASHED, Y. F.. **Boundary element modelling of flat plate floors under vertical loading**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v. 62: p. 1606–1635, 2004.

REGAN, P.E. **Punching Tests of Concrete Slabs with Riss Star Shear Reinforcement for Riss AG**. School of Architecture & Engineering, University of Westminster, London, 1993.

REGAN, P.E.. **Shear combs, reinforcement against puching**. The Structural Engineer. London, 1985.

ROMBACH, G. A.. **Finite element design of concrete structures**. London: Thomas Telford, 2004.

SACRAMENTO, P. V. P.; FERREIRA, M. P.; OLIVEIRA, D. R. C.; MELO, G. S. S. A.. **Punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento**. IBRACON Structures and Materials Journal. Volume 5, n 5, p. 659-691 (ISSN 1983-4195), 2012.

SANTIAGO, W. C.. **Estudo da (não-)conformidade de concretos produzidos no Brasil e sua influência na confiabilidade estrutural**. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo. São Carlos, 2011.

SANTOS, E. S.. **Avaliação estatística do erro de modelos de resistência para elementos lineares de concreto armado da abnt nbr 6118:2007**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2012.

SHEHATA, I.A.E.M. **Simplified model for estimating the punching resistance of reinforced concrete slabs**. Material and Structures, n.23, p.364-371, 1990.

SHEHATA, I.A.E.M. **Theory of punching in concrete slabs**. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London. London, 1985.

SHERIF,A.G.; DILGER, W.H. **Analysis and Deflections of Reinforced Concrete Flat Slabs**. Canadian Journal Civil Engineering, 1998. v. 25, p.451 – 46



SILVA, V. H. M. P.. **Dimensionamento de lajes fungiformes com irregularidades limitadas em planta**. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2013.

SIMMONDS, S. H.. **Flat slabs supported on columns elongated in plan**. ACI Journal; **67**:967–976, 1970.

SIMÕES DA SILVA, L. A. P. Ligações metálicas: métodos avançados de análise e dimensionamento. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**, n. 51, p. 37-50, 2002.

SKORPEN S. A.; DEKKER N. W.. **The application and interpretation of linear finite element analysis results in the design and detailing of hogging moment regions in reinforced concrete flat slabs**. Technical Paper. Journal of the South African Institution of Civil Engineering. South African, 2014.

SOUZA, E. D.. **Um modelo de análise de confiabilidade sob condições de falha por fadiga - aplicação à pás de hidroturbinas Kaplan**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Integridade de Materiais de Engenharia. Universidade de Brasília. Brasília, 2013.

SØRENSEN, J. D.. **Calibration of partial safety factors in Danish Structures Codes**. Workshop on reliability based code calibration. Aalborg, Dinamarca, 2000.

STEWART, M. G.. **Modelling human error rates for human reliability analysis of a structural design task**. Reliability Engineering and System Safety. Vol. 36, p. 171-180, 1992.

STRAMANDINOLI, J. S. B.; LORIGGIO, D. D.. **Estudo da rigidez à torção para a aplicação do processo de analogia de grelha em lajes maciças**. V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. São Paulo, 2003.

STUCCHI, F. R.. **O controle da resistência do concreto e a teoria da confiabilidade**. Seminário técnico. São Paulo, 2010.

STUCCHI, F. R.; KNAPP, L. M.. **Punção em lajes**. In: Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, 3. 1993, São Paulo. Anais. São Paulo: USP, 1993. p211-232

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C.. **Evaluation of the safety criteria of brazilian standard nbr 6118 based on reliability analyses**. Joint IABSE-fib Conference. Cavtat, Croacia, 2010.

TALBOT, A.N. **Reinforced Concrete Wall Footings and Column Footings**, Engineering Experiment Station, University of Illinois, Bulletin 67, USA, 1925.

TIMOSHENKO, S.P.; KRIEGER, S.W.. **Theory of plates and shells**. McGraw-Hill Kogakusha Ltda, 1959.

TRAUTWEIN, L.M. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado: análise experimental e numérica**. 2006, 277 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2006.

VERZENHASSI, C. C.. **Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2008.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The finite element method**. 4 ed. Vol. I, Mc Graw Hill, London, 1988.